1. Calcolare la distanza tra le seguenti due rette:

$$r : \begin{cases} x = y \\ 2y + z - 6 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2 = y - 1 \\ z = -2(x - 2) \end{cases}$$

Soluzione. Si vede facilmente che le due rette sono parallele e non coincidenti (hanno entrambe parametri direttori $1, 1, -2$). Per calcolarne la distanza procediamo scegliendo due punti su r ed uno su s. Siano essi rispettivamente: $A(1, 1, 4)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 0, 2)$. Calcoliamo ora:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & 1 & -1 \\ \vec{k} & -2 & -2 \end{pmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

Il modulo di questo vettore è $\sqrt{21}$ e rappresenta l'area del parallelogramma. Dividendo infine per la lunghezza AB (base del parallelogramma) abbiamo come risultato la distanza cercata:

$$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}}$$

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trovare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A. Determinare inoltre una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP = D$ sia diagonale. Scrivere la matrice D.

Soluzione. La matrice è simmetrica e quindi per il teorema degli assi principali essa è ortogonalmente diagonalizzabile. Questa matrice ha autovalori $-3, 3, 2$ e autovettori rispettivamente, $(-1, 0, 1)^T$, $(1, 0, 1)^T$, $(0, 1, 0)^T$. Essendo gli autovalori distinti i tre avutovettori sono automaticamente tra loro ortogonali e dunque la matrice desiderata P è

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifica infine che

$$P^T AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

3. Dato il sistema $AX = B$ dove $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, applicare il Teorema di Rouché-Capelli per spiegare perché il sistema è incompatibile. Scrivere le equazioni normali corrispondenti e determinare la soluzione approssimata.

Soluzione La matrice del sistema A ha chiaramente rango 2 mentre la matrice completa ha chiaramente rango 3, il sistema è dunque incompatibile per il Teorema di Rouché-Capelli.

Le equazioni normali sono: $(A^T A)Y = A^T B$ che nel nostro caso diventano: $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$, $A^T B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ quindi il sistema da studiare ha matrice completa

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 2 \\ 10 & 20 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

dunque $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ sono le soluzioni approssimate.

4. Determinare un punto B sulla parabola di equazione $y = x^2$ in modo tale che il triangolo OAB abbia area uguale a 8, dove O è l'origine e $A(2, 4)$. Quante soluzioni esistono? Quali sono?

Soluzione. L'area del triangolo AOB si può calcolare con la formula

$$\frac{1}{2} | \det \begin{pmatrix} x & x^2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} |$$

Imponendo che il risultato sia 8 si trova l'equazione

$$|2x^2 - 4x| = 16 \quad x^2 - 2x = 8 \text{ oppure } x^2 - 2x = -8$$

La seconda equazione non ha soluzioni reali. La prima ha soluzioni $x_1 = 4, x_2 = -2$ in corrispondenza troviamo le due soluzioni cercate $B(4, 16)$, $B(-2, 4)$.

5. Sia $T : M(n \times n) \to M(n \times n)$ l'applicazione definita da $T(A) = A + A^T$ (A^T indica la trasposta della matrice A). Verificare che T è lineare. Nel caso particolare in cui $n = 2$ calcolare il determinante di T, la sua traccia, una base per il nucleo ed una per l'immagine.

Soluzione. Linearità:

$$T(A+B) = (A+B)+(A+B)^T = A+B+A^T+B^T = A+A^T+B+B^T = T(A)+T(B)$$

$$T(aA) = (aA)^T = a(A^T) = aT(A)$$

Quando $n = 2$ calcoliamo la matrice di T rispetto alla base standard di $M(n \times n)$, otteniamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha traccia 6 e determinante 0 (ha due righe uguali). Una base per l'immagine è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ed una base del nucleo è data da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

.