Nome: Soluzioni

ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio e solo in essi. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa ma sintetica. Consegnare solo la bella copia. I risultati della prova scritta insieme con un calendario delle prove orali saranno affissi entro la settimana sulla pagina web del docente. Gli orali per gli ammessi si svolgeranno a partire da lunedi 11 febbraio

1. Dati i punti $P_1(3,1,-1), P_2(2,2,0)$ e i punti $Q_1(3,2,2), Q_2(4,0,0)$ scrivere le equazioni cartesiane della retta r congiungente i punti P_1P_2 e della retta s congiungente i punti Q_1Q_2. Verificare che le rette r e s sono sghembe. Calcolare la distanza tra r e s.

Retta P_1P_2 in forma di rapporti uguali : r: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$

Retta s per Q_1Q_2: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-2}$

Consideriamo i tre vettori $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\vec{P_1Q_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; le rette sono sghembe se e solo se il prodotto misto $\vec{P_1Q_1} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

Il valore assoluto ~~di~~

$\vec{P_1Q_1} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s} = 2$ è uguale al volume del parallelepipedo

e $\vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k}$ e dunque $|\vec{r} \wedge \vec{s}| = \sqrt{2}$ è l'area della base.

La distanza cercata è quindi $\frac{|\vec{P_1Q_1} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{|\vec{r} \wedge \vec{s}|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

2. Scrivere la matrice della trasformazione T del piano che trasforma ogni vettore prima ruotandolo di $\frac{\pi}{2}$ e poi proiettandolo sulla retta $x+y=0$. Calcolare $T(6,4)$.

Per trovare la matrice della rotazione R

$R\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ e $R\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ dunque $M=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

è la matrice della rotazione.

Analogamente, per la proiezione, ricordiamo la formula $\text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v})=\left(\vec{v}\cdot\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}\right)\cdot\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\cdot\vec{w}$.

Si ha quindi $P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ e quindi

$N=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$. In definitiva, la matrice desiderata è $NM=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Infine $T\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$

3. Dopo aver richiamato la definizione di complemento ortogonale di un sottospazio, determinare le equazioni cartesiane del complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio U generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Determinare anche una base di $U^\perp$.

Per definizione, $U^\perp = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{v} \cdot \underline{u} = \underline{0} \}$

$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ e quindi $\underline{v} \in U^\perp$, $\underline{v} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

se e solo se soddisfa $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Queste sono le equazioni cartesiane di $U^\perp$.

Per trovare una base di $U^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -s-2t \\ x_2 = -s-3t \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = s+3t-\cancel{s}-2t \\ x_2 = -s-3t \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -s-3t \end{cases}$$

La base cercata è $\left\{ \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

4. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $RC(Oxy)$ è data la conica di equazione $21x^2 - 8xy + 21y^2 - 425 = 0$.

1. Riconoscere se la conica è generale o degenere;
2. Riconoscere di che tipo di conica si tratta (parabola, ellisse, iperbole,...);
3. Calcolarne l'asse o gli assi di simmetria e scriverne una equazione canonica;
4. Calcolare le coordinate del fuoco o fuochi nel sistema di riferimento $RC(Oxy)$ e disegnare la conica in questo stesso sistema di riferimento.

La matrice è $\begin{pmatrix} 425 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & -4 \\ 0 & -4 & 21 \end{pmatrix}$ che ha $\det \neq 0$

si tratta dunque di una conica generale.

Essendo $\begin{vmatrix} 21 & -4 \\ -4 & 21 \end{vmatrix} = 425 > 0$ si tratta di un'ellisse.

Inoltre $\left(\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}}, \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}}\right) = (0,0)$ ha centro nell'origine.

Gli autovalori di $A_{00} = \begin{pmatrix} 21 & -4 \\ -4 & 21 \end{pmatrix}$ sono le soluzioni

di $\lambda^2 - 42\lambda + 425 = 0$ $\quad \lambda_1 = 25, \ \lambda_2 = 17$

Con autovettori, rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Posto $\begin{cases} x' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ y' = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$ e sostituendo abbiamo

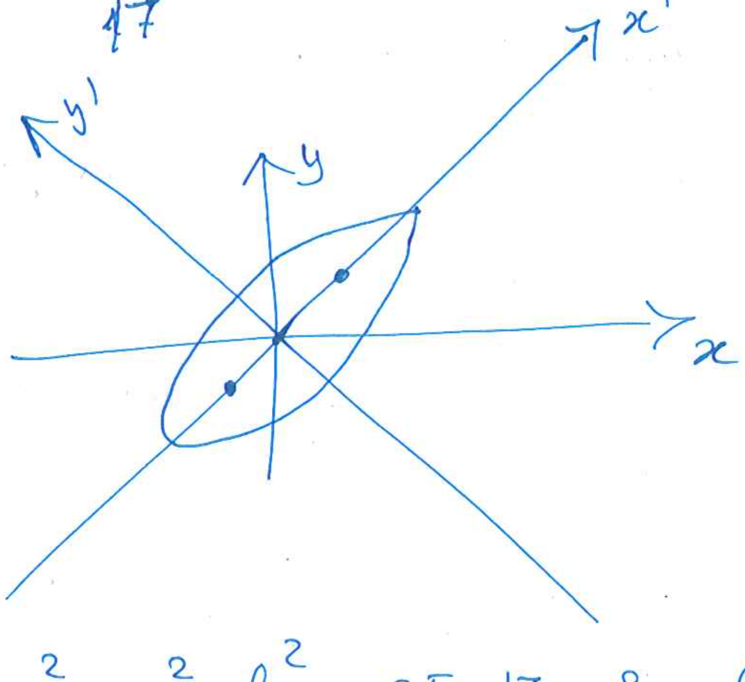
$$\frac{21}{2}\left(x'+y'\right)^2 - 8\,\frac{1}{2}\left(x'+y'\right)\left(x'-y'\right) + \frac{21}{2}\left(x'-y'\right)^2 - 425 = 0$$

$$\frac{21}{2}\left(x'^2 + \cancel{2x'y'} + y'^2\right) - 4\left(x'^2 - y'^2\right) + \frac{21}{2}\left(x'^2 - \cancel{2x'y'} + y'^2\right) - 425 = 0$$

$$\left(\frac{21}{2} + \frac{21}{2} - 4\right)x'^2 + \left(\frac{21}{2} + \frac{21}{2} + 4\right)y'^2 = 425$$

$$17x'^2 + 25y'^2 = 425$$

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{17} = 1$$



Fuochi: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 17 = 8 \qquad c = 2\sqrt{2}$

$(x' = \pm 2\sqrt{2},\ y' = 0)$ cambiando riferimento

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \\ y = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2 \\ y = \dfrac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2 \end{cases}$$

5. Se A è una matrice di ordine 2 con autovalori $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 7$ e rispettivi autovettori $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, calcolare, dando delle opportune giustificazioni:

1. Il polinomio caratteristico di A;
2. Il determinante di A;
3. La matrice A;
4. Gli autovalori di A^2;
5. Il determinante di A^2.

1) Pol caratt è $\lambda^2 - (6+7)\lambda + 6 \cdot 7$

2) $\det A = 42$

3) Sappiamo che $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e

$P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ e $P^{-1}AP = D$ quindi

$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ -24 & 68 \end{pmatrix}$$

4) Gli autovalori di A^2 sono i quadrati: ~~6~~ 36, 49

5) Det di A^2 è $\underline{42^2}$.