Nome:____.

Data:____.

ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa ma sintetica.

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolarne gli autovalori. Scrivere le equazioni cartesiane degli autospazi. Trovare una base per ciascun autospazio. Dire se la matrice è diagonalizzabile ed eventualmente determinare la sua forma diagonale.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-2 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\left[(\lambda-2)^2-4\right] +$$

$$+ 2(-2\lambda+8) - 2(2\lambda-8) = (\lambda-4)(\lambda^2-2\lambda-8) = (\lambda-4)^2(\lambda+2)$$

Autovalori: $4, 4, -2$

Per $\lambda = 4$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Eq: $x - y - z = 0$ $\quad x = y + z$ $\quad$ Base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per $\lambda = -2$ $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$

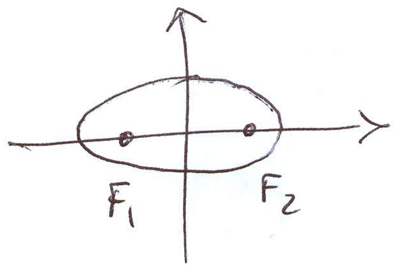
$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & +2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ Base $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rispetto alla base $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ la matrice

diventa $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

2. Scrivere l'equazione dell'ellisse i cui fuochi sono situati sull'asse delle ascisse e posti in maniera simmetrica rispetto all'origine e tale che la distanza tra i fuochi è 10 e l'eccentricità è $\frac{5}{13}$.

L'ellisse è posta come in figura



Sappiamo che $\overline{F_1F_2} = 10$ e dunque le coordinate dei fuochi sono $(\pm 5, 0)$

Quindi $c = 5$.

L'eccentricità è $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$; ne segue che $a = 13$. Infine, sapendo che $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - b^2}$ abbiamo $5 = \sqrt{13^2 - b^2}$,

$$25 = 169 - b^2$$
$$b^2 = 169 - 25 = 144$$
$$b = 12$$

L'equazione cercata è

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1.$$

3. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare tale che $T\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ and $T\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ determinare la sua matrice standard. Usare la matrice standard per calcolare $T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

1° Metodo) Ricaviamo le espressioni di $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ in termini della base $B = \left\{\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Possiamo risolvere i due sistemi simultaneamente

$$\begin{pmatrix}5 & 3 & 1 & 0\\4 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3/2\\0 & 1 & 2 & -5/2\end{pmatrix}$$ e dunque

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Dunque $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = T\left(-\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = T\left(\frac{3}{2}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-17/2\\13/2\end{pmatrix}$$

Infine $\begin{pmatrix}8 & -17/2\\-5 & 13/2\end{pmatrix}$ è la matrice desiderata.

2° metodo) Calcoliamo $M_B(T) = \left(C_B(T(b_1)),\ C_B(T(b_2))\right)$

$$T(b_1) = T\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$T(b_2) = T\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Risolvendo $\begin{pmatrix}5 & 3 & 6 & 7\\ 4 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3/5 & 6/5 & 7/5\\ 4 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix} \to$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 3/5 & 6/5 & 7/5\\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{19}{5} & -\frac{38}{5}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3/5 & 6/5 & 7/5\\ 0 & 1 & \frac{19}{2} & \frac{38}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -9/2 & -10\\ 0 & 1 & \frac{19}{2} & 19\end{pmatrix}$$ Dunque $M_B(T) = \begin{pmatrix}-9/2 & -10\\ 19/2 & 19\end{pmatrix}$

Ora ricordiamo che $M_\mathcal{E}(T) = P_{\mathcal{E}\leftarrow B}\, M_B(T)\, P_{B\leftarrow\mathcal{E}}$

dove $\mathcal{E}$ è la base standard.

$$P_{\mathcal{E}\leftarrow B} = \left(C_\mathcal{E}(b_1),\ C_\mathcal{E}(b_2)\right) = \begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$P_{B\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 3/2\\ 2 & -5/2\end{pmatrix}$$

dunque $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9/2 & -10\\ 19/2 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3/2\\ 2 & -5/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & -17/2\\ -5 & 13/2\end{pmatrix}$

4. Supponiamo che lo spazio delle colonne della matrice A, che ha tre righe e due colonne, sia generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dire se il sistema $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}$ è risolubile. Dire anche se il sistema $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ è risolubile. Giustificare le risposte.

Sappiamo che un S.L. è risolubile se e solo se la colonna dei termini noti appartiene allo spazio generato dalle colonne di A. Per ipotesi $C(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ quindi il primo sistema non è risolubile in quanto $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix} \notin \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ mentre il secondo è risolubile: $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Dato il sistema seguente, scriverne la matrice completa, ridurre tale matrice nella sua forma a gradini tramite operazioni elementari ed infine risolvere il sistema equivalente così ottenuto tramite sostituzione a ritroso.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -6 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Le matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & -6 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il sistema equivalente è
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = \cancel{1} -1 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Dunque
$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 + t - 1 \\ x_2 = 3x_3 + t + 2 \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -4 - t \\ x_2 = 5 + 4t \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = t \end{cases}$$