Nome:____.

Data:____.

ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio, usare eventualmente anche il retro del foglio. Non aggiungere altri fogli. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa e sintetica.

1.

1. Discutere la natura della conica di equazione

$$ax^2 + 2axy + y^2 - 2x - 2ay + a = 0$$

al variare del parametro reale a (determinare, cioè, per quali valori del parametro a la conica è generale o meno, per quali valori è un ellisse, iperbole o parabola).

2. In particolare determinare il valore di a per cui la conica è una parabola (generale) e disegnarla.

3. Trovare infine il centro e gli asintoti dell'iperbole degenere che si ottiene per il valore $a = -\frac{1}{2}$.

Soluzione. Studiamo il determinante

$$\begin{vmatrix} a & -1 & -a \\ -1 & a & a \\ -a & a & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3a^2 - 2a^3 = -(1+2a)(a-1)^2 = 0$$

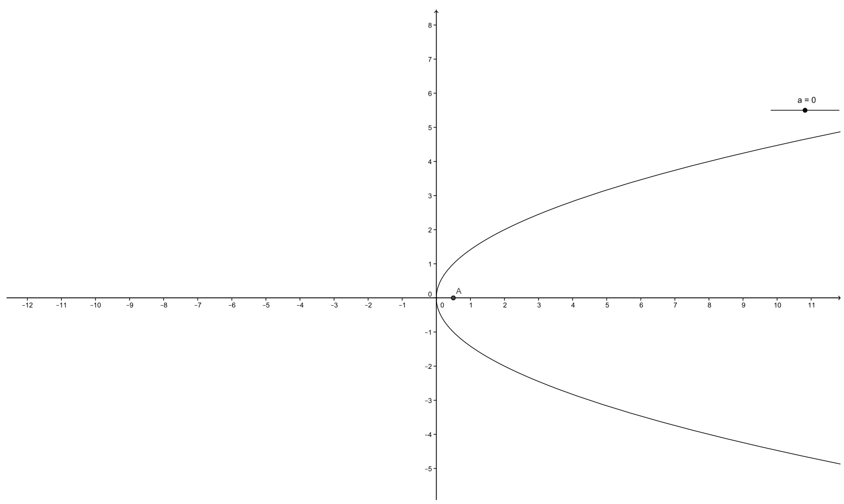
da cui vediamo che il determinate si annulla per $a = 1$, radice doppia, e $a - \frac{1}{2}$, radice semplice. Per tali valori la conica è degenere, per ogni altro valore di a essa è generale.

Per riconoscerne il tipo studiamo il segno del determinante

$$\begin{vmatrix} a & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = a - a^2 = a(1-a)$$

Lo studio della disequazione $a(1-a) > 0$ ci dice che per $a < 0$ e per $a > 1$, la conica è un'iperbole. Per $0 < a < 1$ la conica è un'ellisse. Infine per $a = 0$ abbiamo una parabola generale, mentre per $a = 1$ abbiamo una parabola degenere, in effetti doppiamente degenere. Con ciò abbiamo risposto al punto 1.

Per il punto 2: Per $a = 0$ l'equazione della conica si riduce alla semplicissima equazione $y^2 - 2x = 0$ il cui disegno è



Punto 3. Per $a = -\frac{1}{2}$ abbiamo $-\frac{1}{2}x^2 - xy + y^2 - 2x + y - \frac{1}{2} = 0$ e gli asintoti si trovano dapprima calcolando i parametri direttori. Questi sono le soluzioni dell'equazione

$$-\frac{1}{2}\ell^2 - \ell m + m^2 = 0$$

ossia, ponendo $m = 1$, $-\frac{1}{2}\ell^2 - \ell + 1 = 0$ da cui le soluzioni $\ell = -1 \pm \sqrt{3}$. Calcoliamo poi il centro della conica: $\left(\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}}, \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}}\right) = (-1, -1)$. Gli asintoti cercati sono quindi le rette passanti per il centro e aventi i parametri direttori calcolati prima, cioè:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 \\ -1+\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 \\ -1-\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Svolgendo i calcoli si trovano

$$(x+1) - (-1+\sqrt{3})(y+1) = 0 \quad (x+1) + (1+\sqrt{3})(y+1) = 0$$

che sono gli asintoti cercati (in effetti, in questo caso degenere, essi coincidono con la conica).

2. Sia
$$M = M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(T) = \begin{pmatrix} t & -1 & -t \\ -1 & t & t \\ -t & t & 1 \end{pmatrix},$$
la matrice di una trasformazione lineare $T : \mathbb{P}_2 \to V$ dove t è un parametro reale, $\mathbb{P}_2$ è lo spazio dei polinomi in una indeterminata x di grado minore o uguale a 2 e V è lo spazio delle matrici simmetriche di ordine 2, e inoltre $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$ e $\mathcal{D} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ sono le due basi fissate rispettivamente di $\mathbb{P}_2$ e di V.

1. calcolare $T(x^2 + 2x + 3)$
2. Determinare i valori di t per cui T non è iniettiva.
3. Per ciascuno dei valori per cui T non è iniettiva trovare una base per il nucleo ed una per l'immagine di T.

Soluzione. Avendo a disposizione la matrice M, per calcolare $T(x^2 + 2x + 3)$ basta prendere le coordinate di $x^2 + 2x + 3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e moltiplicare:
$$\begin{pmatrix} t & -1 & -t \\ -1 & t & t \\ -t & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 2 - 3t \\ -1 + 2t + 3t \\ -t + 2t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2t \\ -1 + 5t \\ t + 3 \end{pmatrix}$$
questa terna va ora reinterpretata come matrice e quindi infine
$$T(x^2 + 2x + 3) = \begin{pmatrix} -2 - 2t & -1 + 5t \\ -1 + 5t & t + 3 \end{pmatrix}$$

Punto 2. Basta ricordarsi che una trasformazione lineare tra due spazi della stessa dimensione, 3 nella fattispecie, è iniettiva se e solo se è invertibile. Quindi basta verificare per quali valori di t la matrice ha determinante nullo. Il calcolo di questo determinante, si osservi che è lo stesso determinante calcolato nell'esercizio 1, ci dice che l'applicazione non è iniettiva per $t = 1$ e per $t = -\frac{1}{2}$.

Punto 3. Andiamo a studiare $null(M)$ quando $t = 1$. Questo significa studiare il sistema lineare omogeneo che ha per matrice dei coefficienti la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Questa matrice ha rango 1, da cui l'unica equazione $x - y - z = 0$ le cui soluzioni sono
$$\{\begin{pmatrix} s + t \\ s \\ t \end{pmatrix}, s, t \in \mathbf{R}\}$$

Una base di $null(M)$ è quindi $\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}$ da cui una base di $\ker T$ è $\{x^2+x, x^2+1\}$. Il Teorema delle dimensioni ci dice che la dimensione dell'immagine di T è 1; di conseguenza, come base di imT basterà prendere la matrice corrispondente alla prima colonna di M: $\{T(x^2) = \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}\}$. Per $t = -\frac{1}{2}$ ragioniamo in maniera analoga i calcoli sono i seguenti

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\-1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & 1\\1 & -1 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\0 & -3 & 3\\0 & -3 & 3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Il sistema da studiare è quindi

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\y-z=0\end{cases}$$

le soluzioni sono

$$\{\begin{pmatrix}-t\\t\\t\end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}\}$$

e una base di $\ker T$ è $\{-x^2+x+1\}$. Infine una base di imT si ottiene prendendo le matrici corrispondenti alle prime due colonne di M:

$$\{T(x^2) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\-1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, T(x) = \begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\}.$$

3. Assegnati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ del piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale $RC(Oxy)$,

1. Verificare che l'equazione

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

   descrive il luogo dei punti $P(x, y)$ del piano per cui l'angolo $P_1\widehat{P}P_2$ è retto.

2. Riconoscere e disegnare il luogo nel caso in cui $P_1(-1, 2)$ e $P_2(5, 3)$.

Soluzione. L'angolo $P_1\widehat{P}P_2$ è retto se e solo se i vettori $\overrightarrow{P_1P} \cdot \overrightarrow{P_2P} = 0$. In coordinate ciò significa

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

l'equazione richiesta.

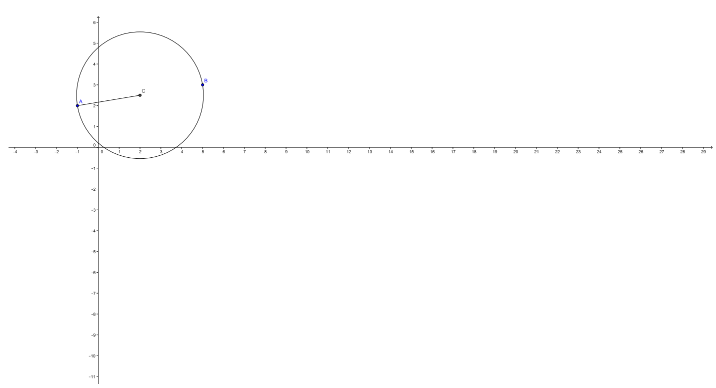
Punto 2. Nel caso particolare indicato abbiamo

$$(x + 1)(x - 5) + (y - 2)(y - 3) = 0$$

Sviluppando i calcoli si trova

$$x^2 + y^2 - 4x - 5y + 1 = 0$$

Si riconosce quindi che questa è una circonferenza di centro $(2, \frac{5}{2})$ e raggio $r = \sqrt{-1 + (\frac{4}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$. Il disegno è



4. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e dato il vettore $\mathbf{b} = (3, 2, 5)^T$,

1. Verificare che il sistema $AX = \mathbf{b}$ è incompatibile.
2. Calcolare la soluzione approssimata del sistema incompatibile del punto precedente.

Soluzione. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango due perché, ad esempio, il minore $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$. D'altra parte, la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -12 & -4 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 e quindi, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile.

Punto 2. La soluzione approssimata si calcola tramite le equazioni normali

$$A^T A X = A^T \mathbf{b}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 6x = 2 \\ 30y = 16 \end{cases}$$

e quindi $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \\ \frac{8}{15} \end{pmatrix}$ sono le soluzioni approssimate cercate.