Nome: SOLUZIONI.

Data:.

ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa ma sintetica.

1.

1. Discutere la natura della conica di equazione

$$ax^2 - 2xy + ay^2 - 2x + 2y + 3 = 0$$

al variare del parametro reale a (determinare, cioè, per quali valori del parametro a la conica è generale o meno, per quali valori è un ellisse, iperbole o parabola).

2. In particolare determinare il valore di a per cui la conica è una parabola e calcolarne l'asse di simmetria.

3. Trovare infine il centro e gli assi di simmetria della conica per il valore $a = -2$.

La matrice è $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, $\det A = 3a^2 - 2a - 1$

Questo si annulla per $a = -\frac{1}{3}$, $a = 1$. Per questi valori la conica è dunque degenere, altrimenti è generale.

Il minore $\alpha_{00} = \begin{vmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$ si annulla per $a = 1, -1$. Se $a = 1$ abbiamo una parabola degenere (coppia di rette parallele). Se $a = -1$ abbiamo una parabola. Studiamo il segno di α_{00}.

		-1		1	
α_{00}	$+$		$-$		$+$

E' un'ellisse per $a < -1$, Per $a > 1$

un'iperbole per $-1 < a < 1$ e $a \neq -\frac{1}{3}$.

abbiamo un'ellisse (immaginaria)

2) Per $\alpha = -1$ abbiamo una parabola di eq.

$$-x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$$

l'asse: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\quad 2x + 2y + \cancel{2} + 2x + 2y - \cancel{2} = 0$

$$\boxed{x + y = 0}$$

3) Quando $a = -2$ abbiamo

$$-2x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$$

abbiamo un'ellisse di centro

$$\left(\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}}, \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}}\right) = \left(\frac{-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix}}{3}, \frac{\begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3}\right) = \left(\frac{a-1}{3}, \frac{1-a}{3}\right)$$

Se $a = -2$ $\quad \left(\frac{-3}{3}, \frac{3}{3}\right) = (-1, 1)$

Gli assi di simmetria: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

$$(\lambda + 3)(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda = -1$ $\quad \lambda = -1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Asse parallelo a $x + y = 0$

$\lambda = -3$ $\quad \lambda = -3 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Asse parallelo a $x - y = 0$

$$(x+1) + (y-1) = 0 \qquad \boxed{x + y = 0}$$

$$(x+1) - (y-1) = 0 \qquad \boxed{x - y + 2 = 0}$$

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

1. calcolarne gli autovalori.
2. Scrivere le equazioni cartesiane degli autospazi.
3. Trovare una base per ciascun autospazio.
4. Dire se la matrice è diagonalizzabile o ortogonalmente diagonalizzabile ed eventualmente determinare una base di autovettori (o una base ortonormale di autovettori).

1) Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 16$
$= (\lambda-1)(\lambda-4)^2$
Gli autovalori sono $\lambda_1 = 4$ (doppio) e $\lambda_2 = 1$ (semplice)

2) Per $\lambda_1 = 4$ la matrice $\lambda I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e

l'eq. dell'autospazio è $x + y - z = 0$

Per $\lambda_2 = 1$ la matrice è $\lambda I - A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

e le eq. sono $\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$

3) Una base per $E_4(A)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; una base per

$E_1(A)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

4) Per il Teorema Assi principali la matrice è ortogonal diag. e una base ortogonale di autovettori è

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{(-1)}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ costituiscono una base ortogonale. Una base ortonormale è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

3. Sia $T : M_{2\times 2} \to \mathbb{P}_2$ la trasformazione definita da $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b) + (b-c)x + (c-a)x^2$.

1. Verificare che T è lineare.
2. Dopo aver scelta una base $\mathcal{B}$ per lo spazio $M_{2\times 2}$ ed una base $\mathcal{B}'$ per lo spazio $\mathbb{P}_2$ determinare la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$.
3. Determinare una base per il nucleo e una per l'immagine di T.

1) La verifica è immediata

2) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto 1 - x^2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto -1 + x \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (-x + x^2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto 0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $\operatorname{Ker} T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & d \end{pmatrix} \right\}$

e una base è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Sapendo che $\dim M_{2\times 2} = 4 = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow$ $\dim \operatorname{Im} T = 2$; Basta dunque trovare due vettori indipendenti di $\operatorname{Im} T$, per esempio

$\{1 - x^2, -1 + x\}$

4. Dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 2, -1)^T$ e $\mathbf{v} = (5, -2, 1)^T$ di $\mathbb{R}^3$,

1. calcolare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{w} = (3, 2, 5)^T$ sul piano π generato dai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, cioè $\pi = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
2. Scrivere l'equazione cartesiana del piano π.

1) Basta calcolare $\dfrac{\underline{w} \cdot \underline{u}}{\underline{u} \cdot \underline{u}} \underline{u} + \dfrac{\underline{w} \cdot \underline{v}}{\underline{v} \cdot \underline{v}} \underline{v} =$

$$= \frac{3+4-5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{15-4+5}{30} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{8}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

2) L'eq. cartesiana si ottiene ponendo

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 5 \\ y & 2 & -2 \\ z & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{da cui} \quad -6y - 12z = 0$$

e, semplificando, $\boxed{y + 2z = 0}$ eq. di π

(Verifica: il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$ soddisfa questa eq.).