Nome:____.

Data:____.

ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio, usare eventualmente anche il retro del foglio. Non aggiungere altri fogli. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa e sintetica.

1.

1. Discutere la natura della conica di equazione

$$x^2 + (k^2 - 1)y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$

   al variare del parametro reale k (determinare, cioè, per quali valori del parametro k la conica è generale o meno, per quali valori è un ellisse, iperbole o parabola).

2. Nel caso, o casi, in cui la conica è una parabola, determinare il fuoco, il vertice e l'asse di simmetria di essa.

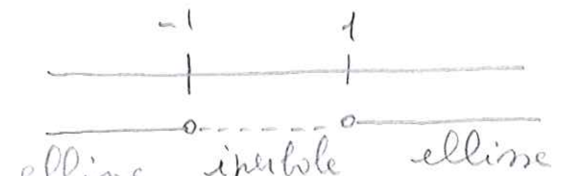
) La matrice della conica è $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & k^2-1 \end{pmatrix}$

che ha determinante $\Delta = 3(k^2-1) - 4 - (k^2-1) = 2(k^2-1) - 4 = 0$

$k^2 = 3 \quad k = \pm\sqrt{3}$, per questi valori la conica è degenere,

per altri valori è generale.

Studio: $\alpha_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^2-1 \end{vmatrix} = k^2 - 1 > 0$



per $k = \pm 1$ abbiamo una parabola:

$x^2 - 2x - 4y + 3 = 0$: Asse della parabola $(u=1, v=0)$

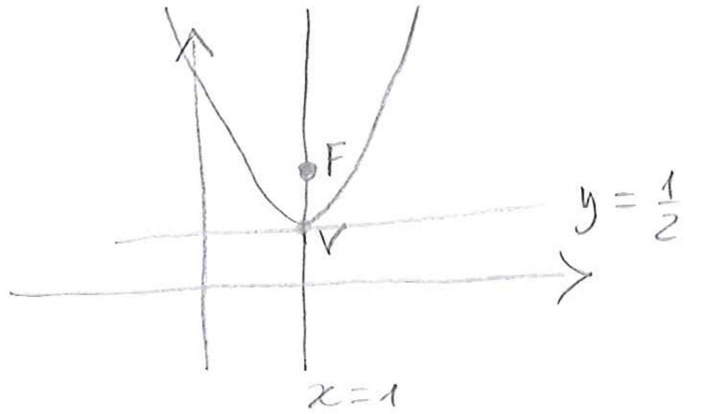
e $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ossia $2x - 2 = 0$ o $\boxed{x - 1 = 0}$

Il vertice è l'intersezione.

$$\begin{cases} x^2-2x-4y+3=0 \\ x=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-2-4y+3=0 \\ x=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2-4y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ x=1 \end{cases}$$ $V\left(1,\frac{1}{2}\right)$ e la retta perpendicolare

all'asse per V è $\boxed{y=\frac{1}{2}}$



Posto $\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y-\frac{1}{2} \end{cases}$

e quindi $\begin{cases} x=x'+1 \\ y=y'+\frac{1}{2} \end{cases}$ e sostituendo

$$(x'+1)^2-2(x'+1)-4\left(y'+\frac{1}{2}\right)+3=0$$

$$x'^2+2x'+1-2x'-2-4y'-2+3=0$$

$x'^2-4y'=0$ e questo ha fuoco $(0,c)$

dove $c=1$ in RC' mentre in RC ha coordinate

$$\begin{cases} x=x'+1=0+1=1 \\ y=y'+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \end{cases} \quad \left(1,\frac{3}{2}\right)$$

2. Sia

$$M = M_{\mathcal{BD}}(T) = \begin{pmatrix} t & 1+t & -t \\ 1+t & t & t \\ -t & t & -1-t \end{pmatrix},$$

la matrice di una trasformazione lineare $T : V \to \mathbb{P}_2$ dove t è un parametro reale, V è lo spazio delle matrici simmetriche di ordine 2, $\mathbb{P}_2$ è lo spazio dei polinomi in una indeterminata x di grado minore o uguale a 2 e inoltre $\mathcal{D} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$ sono le due basi fissate rispettivamente di V e di $\mathbb{P}_2$.

1. calcolare $T(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix})$
2. Determinare i valori di t per cui T non è iniettiva.
3. Per ciascuno dei valori per cui T non è iniettiva trovare una base per il nucleo ed una per l'immagine di T.

1. Le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in quanto

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi

$M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 2(1+t) - 5t \\ 1+t + 2t + 5t \\ -t + 2t + 5(-1-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t+2 \\ 8t+1 \\ -4t-5 \end{pmatrix}$ ossia il polinomio

$(-2t+2)x^2 + (8t+1)x - 4t - 5 = T\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. T iniettiva $\Leftrightarrow \ker T = \{0\} \Leftrightarrow \det M \neq 0$

$\det M = 1 + 3t - 4t^3$ che si annulla per $t = 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

T non è iniettiva per questi valori di t.

3) T_1: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ossia il sistema $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ la base di

null (M) è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e la base di $\ker T_1$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

invece per $\operatorname{Im} T_1$ prendiamo le prime due colonne di M : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi i polinomi corrispondenti

$\left\{ x^2+2x-1,\ 2x^2+x+1 \right\}$ base di $\operatorname{Im} T_1$.

Per $t=-\frac{1}{2}$ $\quad M=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Null M : $x-y-z=0$ di base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e dunque

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ base di $\ker T_{\frac{1}{2}}$

Mentre $\operatorname{Im} T_{-\frac{1}{2}}$: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

è il polinomio che genera $\operatorname{Im} T_{-\frac{1}{2}}$.

3. Siano dati il punto $P(1,3,5)$ e la retta r di equazione parametrica $x = 1-t, y = 5+t, z = 2t$. Determinare la retta passante per P complanare con r e parallela al piano $\pi : 4x + 2y - z = 0$.

Eq. cartesiane di r: $t = \frac{z}{2}$ $\begin{cases} x = 1 - \frac{z}{2} \\ y = 5 + \frac{z}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + z - 2 = 0 \\ 2y - z - 10 = 0 \end{cases}$ Fascio di asse r:

$\lambda(2x + z - 2) + \mu(2y - z - 10) = 0$

Passante per P: $\lambda(2+5-2) + \mu(6-5-10) = 0$

$5\lambda - 9\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 9, \mu = 5$

$9(2x + z - 2) + 5(2y - z - 10) = 0$

$\boxed{9x + 5y + 2z - 34 = 0}$

Parallelo a π: $4x + 2y - z + k = 0$

passante per P $4 + 6 - 5 + k = 0$

$k = -5$

$$\boxed{\begin{cases} 9x + 5y + 2z - 34 = 0 \\ 4x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}}$$

è la retta richiesta.

4. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Determinare gli autovalori e i relativi autovettori della matrice A;
2. Per ciascuno degli autospazi trovati determinare una base;
3. Dire se la matrice è diagonalizzabile ed eventualmente determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

Essendo a blocchi, il pol caratteristico è

$$(\lambda^2-3\lambda+2)(\lambda^2-4\lambda+3)=0$$ da cui le

soluzioni $3, 2, 1$ (doppia)

Autovettori per $\lambda=1$: $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} -4x_1+3x_2=0 \\ -2x_3-x_4=0 \end{matrix}$

da cui $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Se $\lambda=2$ $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ da cui $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Infine $\lambda=3$ $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La matrice P è

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ e dunque $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(Si può verificare che $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$