Cognome e Nome in stampatello:____________________________________.

Data: 12 febbraio 2016

ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio, usare eventualmente anche il retro del foglio. Non aggiungere altri fogli. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa e sintetica.

1. Diagonalizzare ortogonalmente la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione.</u> Consideriamo

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} (\lambda-2)^3 - 125 - 125 - 25(\lambda-2) - 25(\lambda-2) - 25(\lambda-2) &= 0 \\ (\lambda-2)^3 - 75(\lambda-2) - 250 &= 0 \\ \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 - 75\lambda + 150 - 250 &= 0 \\ \lambda^3 - 6\lambda^2 - 63\lambda - 108 &= 0 \end{aligned}$$

Una soluzione di questa equazione è chiaramente -3 (basta osservare, per esempio, che ponendo $\lambda = -3$ nel polinomio caratteristico si ha

$$\begin{vmatrix} -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

che ha rango 1. In ogni caso, possiamo ora dividere il polinomio caratteristico per $\lambda+3$ e ottenere come quoziente il polinomio $\lambda^2 - 9\lambda - 36$ che ha come radici -3 e 12. In definitiva abbiamo trovato che -3 è un autovalore doppio e 12 è un autovalore semplice.

Determiniamo gli autospazi:

E_{-3}: Il SLO è $-5x - 5y - 5z = 0$ ossia $x + y + z = 0$ da cui otteniamo due autovettori indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

E_{12}: Il SLO è $\begin{cases} 10x - 5y - 5z = 0 \\ -5x + 10y - 5z = 0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - 1z = 0 \end{cases}$ Applicando delle operazioni elementari alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

e il terzo autovettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora dobbiamo ortogonalizzare i primi due autovettori. Con Gram-Schmidt, il primo vettore è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

il secondo si ottiene da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e, senza alterare il risultato, possiamo prendere anche $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ora occorre normalizzare questi tre vettori mutuamente ortogonali. Otteniamo, in definitiva la matrice,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Questa matrice è ortogonale e si può verificare che $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ come desiderato.

2. Sia dato il numero complesso $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Calcolare z^{100}.

Soluzione.

Per prima cosa scriviamo il numero nella forma trigonometrica, osservando che il suo modulo è 1 e il suo argomento è $\frac{\pi}{4}$:

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} z^{100} &= \cos\left(\frac{100\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{100\pi}{4}\right) \\ &= \cos 25\pi + i\sin 25\pi = -1 \end{aligned}$$

3. Fissato il polinomio $p(x) = x+1$, sia $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ l'endomorfismo definito da $T(f(x)) = (x+1)f'(x)$, dove $f(x)$ è un polinomio di $\mathbb{P}_3$ e $f'(x)$ indica la sua derivata.

1. Calcolare $T((x+1)^3)$.
2. Calcolare la traccia e il determinante di T.
3. Determinare una base per il nucleo e una per l'immagine di T.

Soluzione.

1. Calcoliamo $T((x+1)^3)$:

$$T((x+1)^3) = T(x^3+3x^2+3x+1) = (x+1)(3x^2+6x+3) = 3x^3+9x^2+9x+3$$

2. Determiniamo una matrice che rappresenti l'endomorfismo fissando una base ordinata. Per esempio, prendiamo, con le solite notazioni,

$$\mathcal{B} = \left(1, x, x^2, x^3\right)$$

Calcoliamo:

$$T(1) = (x+1) \cdot 0 = 0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x) = (x+1) \cdot 1 = (x+1) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = (x+1) \cdot 2x = 2x^2 + 2x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x^3) = (x+1) \cdot 3x^2 = 3x^3 + 3x^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi la matrice

$$M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui si ha evidentemente che la traccia è 6 e il determinante è 0 (la prima colonna è nulla).

3. Per studiare il nucleo possiamo risolvere il SLO che ha la matrice $M(T)$ come matrice dei coefficienti. Usiamo delle operazioni elementari:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango è 3. Il SLO è dunque

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui una soluzione indipendente è quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che sono le coordinate rispetto alla base fissata del polinomio costante 1. Quindi $\{1\}$ è la base cercata.

Per quanto riguarda una base dell'immagine di T, il Teorema delle dimensioni ci dice che $\dim \mathbb{P}_3 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$ e quindi $\dim \operatorname{Im} T = 3$. Per determinare la base basta scegliere, tra le colonne della matrice T quelle tre che corrispondono ai pivot di T e quindi la seconda, la terza e la quarta. Abbiamo quindi che una base di $\operatorname{Im} T$ è costituita dai polinomi $1 + x, 2x^2 + 2x, 3x^3 + 3x^2$

4. Studiare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax - y - (a+2) = 0 \\ (1-a)x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$. Studiare la curva che si ottiene come luogo geometrico delle soluzioni al variare di a. Riconoscere che si tratta di una parabola. Effettuare un cambiamento di riferimento in modo che l'equazione della parabola sia in forma canonica. Determinare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice nei due sistemi di riferimento.

<u>Soluzione.</u>

La matrice dei coefficienti del sistema è $\begin{pmatrix} a & -1 \\ (1-a) & 1 \end{pmatrix}$ che ha determinante $a + (1-a) = 1$ sempre diverso da zero. Il sistema quindi ammette una sola soluzione per qualunque valore di a. Usando la regola di Cramer abbiamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = a + 2 - 2 = a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a+2 \\ 1-a & -2 \end{vmatrix}}{1} = -2a - (1-a)(a+2) = -2a - (a + 2 - a^2 - 2a) = a^2 - a - 2$$

La curva ha quindi equazione $y = x^2 - x - 2$. Per ottenere la forma canonica dell'equazione di questa parabola basta "completare il quadrato":

$$y = (x^2 - x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

ossia $y + \frac{9}{4} = (x - \frac{1}{2})^2$. Il cambiamento di riferimento è allora

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2} \\ y' = y + \frac{9}{4} \end{cases}$$

e l'equazione canonica è $y' = (x')^2$. Sappiamo allora che il fuoco ha coordinate, nel sistema $RC(Ox'y')$, $F(0, c) = F(0, \frac{1}{4})$ e la direttrice ha equazione $y' = -\frac{1}{4}$. Mentre nel riferimento $RC(Oxy)$ abbiamo

$$\begin{cases} 0 = x - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} = y + \frac{9}{4} \end{cases}$$

da cui $x = \frac{1}{2}, y = -2$ sono le coordinate del fuoco e $-\frac{1}{4} = y + \frac{9}{4}$ ci dà $y = -\frac{5}{2}$.

5. Dimostrare che una matrice quadrata A e la sua trasposta hanno gli stessi autovalori.

Soluzione.

Consideriamo il polinomio caratteristico di A: $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)^T$ perchè il determinante di una matrice è uguale al determinante della matrice trasposta. Inoltre, la matrice $(\lambda I - A)^T = \lambda I^T - A^T$ per le proprietà della trasposizione, e $\lambda I^T - A^T = \lambda I - A^T$, perché I è simmetrica. In definitiva quindi $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A^T)$ e dunque le due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi gli stessi autovalori.

6. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato da $(1,1,1,1,1)$ e $(1,2,-2,-1,0)$ e W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Determinare una base del sottospazio $U \cap W$.

Soluzione.

Per prima cosa scriviamo le equazioni cartesiane di U imponendo che

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

A tal fine, utilizzando il teorema degli orlati, fissiamo l'attenzione sul minore di ordine due non nullo composto dalle ultime due righe e dalle ultime due colonne e richiediamo che

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

che sono le equazioni cartesiane del sottospazio U desiderate.

Ora possiamo determinare la base del sottospazio $U \cap W$ studiando il sistema

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

La matrice di questo sistema (lineare omogeneo) è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Da cui deduciamo che il rango è 5 e quindi il SLO ammette solo la soluzione banale. In conclusione lo spazio intersezione è lo spazio nullo.