Cognome e Nome:____.

Data:____.

ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio, usare eventualmente anche il retro del foglio. Non aggiungere altri fogli. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa e sintetica.

1. Diagonalizzare ortogonalmente la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione.</u> La matrice è simmetrica e quindi, per il Teorema degli Assi Principali, è ortogonalmente diagonalizzabile. Consideriamo

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda - 3 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)^3 - 64 - 64 - 16(\lambda - 3) - 16(\lambda - 3) - 16(\lambda - 3) = 0 \\ (\lambda - 3)^3 - 48(\lambda - 3) - 128 = 0 \\ \lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 - 48\lambda + 144 - 128 = 0 \\ \lambda^3 - 9\lambda^2 - 21\lambda - 11 = 0 \end{aligned}$$

Una soluzione di questa equazione è chiaramente -1 (basta osservare, per esempio, che ponendo $\lambda = -1$ nel polinomio caratteristico si ha

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

che ha rango 1. In ogni caso, possiamo ora dividere il polinomio caratteristico per $\lambda + 1$ e ottenere come quoziente il polinomio $\lambda^2 - 10\lambda - 11$ che ha come radici -1 e 11. In definitiva abbiamo trovato che -1 è un autovalore doppio e 11 è un autovalore semplice.

Determiniamo gli autospazi:

E_{-1}: Il SLO è $-4x - 4y - 4z = 0$ ossia $x + y + z = 0$ da cui otteniamo due autovettori indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

E_{11}: Il SLO è $\begin{cases} 8x-4y-4z=0 \\ -4x+8y-4z=0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y-1z=0 \end{cases}$ Applicando delle operazioni elementari alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-z=0 \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

e il terzo autovettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora dobbiamo ortogonalizzare i primi due autovettori. Con Gram-Schmidt, il primo vettore è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

il secondo si ottiene da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e, senza alterare il risultato, possiamo prendere anche $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ora occorre normalizzare questi tre vettori mutuamente ortogonali. Otteniamo, in definitiva la matrice,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Questa matrice è ortogonale e si può verificare che $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ come desiderato.

2. Calcolare le radici quarte distinte del numero complesso $z = \frac{1+2i}{3+i}$.
Soluzione.
Per prima cosa scriviamo il numero nella forma $a + ib$:

$$z = \frac{1+2i}{3+i} = \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$
$$\frac{3-i+6i+2}{9+1} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

Ora otteniamo la sua forma trigonometrica, osservando che il suo modulo è $\sqrt{\frac{1}{2}}$ e il suo argomento è $\frac{\pi}{4}$:

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Otteniamo che i valori delle radici quarte distinte desiderate si hanno ponendo $k = 0, 1, 2, 3$ nella formula seguente

$$z^{\frac{1}{4}} = \sqrt[8]{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

ossia

$$z_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right]$$
$$z_1 = \sqrt[8]{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$z_2 = \sqrt[8]{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \pi\right)\right]$$
$$z_3 = \sqrt[8]{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

3. Fissata la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, sia $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ l'endomorfismo definito da $T(B) = AB - BA$, $B \in M_{2\times 2}$.

1. Calcolare la traccia e il determinante di T.
2. Determinare una base per il nucleo e una per l'immagine di T.
3. Determinare, se esistono, tutti gli autovettori relativi all'autovalore nullo.

<u>Soluzione.</u>

Determiniamo una matrice che rappresenti l'endomorfismo fissando una base ordinata. Per esempio, prendiamo, con le solite notazioni,

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

Calcoliamo:

$$T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi la matrice

$$M(T) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ha evidentemente che la traccia è 0 e il determinante è 0 (la prima riga e l'ultima della matrice sono opposte).

Per studiare il nucleo possiamo risolvere il SLO che ha la matrice $M(T)$ come matrice dei coefficienti. Usiamo delle operazioni elementari:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il SLO è dunque

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = s + t \\ x_2 = s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

Due soluzioni indipendenti sono quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ che sono le coordinate rispetto alla base fissata delle matrici, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queste costituiscono la base cercata del nucleo di T.

Per quanto riguarda una base dell'immagine di T, il Teorema delle dimensioni ci dice che $\dim M_{2\times 2} = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$ e quindi $\dim \operatorname{Im} T = 2$. Per determinare la base basta scegliere, tra le colonne della matrice T quelle due che corrispondono ai due pivot di T e quindi la prima e la seconda. Abbiamo quindi che una base di $\operatorname{Im} T$ è costituita dalle due matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Infine, gli autovettori relativi all'autovalore nullo sono tutti gli elementi del nucleo, già studiato.

4. Scrivere le equazioni parametriche della retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette seguenti

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = \frac{t+3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5 \\ y = u \\ z = u \end{cases}$$

dove t, u sono due parametri reali.

Soluzione.

Verifichiamo innanzitutto che le due rette sono sghembe. Per far ciò prendiamo due punti arbitrari su una retta e due punti arbitrari sulla seconda retta, per esempio ponendo $t = 0$: $(0, 0, \frac{3}{2})$, $t = 1 : (-1, 1, 2)$ e $u = 0, (-5, 0, 0)$ $u = 1, (-5, 1, 1)$. Si verifica facilmente che il determinante ottenuto prendendo le differenze delle coordinate,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & \frac{3}{2} \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

dunque i quattro punti non sono complanari.

Siano ora $P(-t, t, \frac{t+3}{2})$ e $Q(-5, u, u)$ due punti variabili sulle due rette e prendiamo il vettore $\overrightarrow{PQ}$ di coordinate

$$\begin{pmatrix} -5 + t \\ u - t \\ u - \frac{t+3}{2} \end{pmatrix}$$

Imponiamo che $\overrightarrow{PQ}$ sia ortogonale alle due rette date:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

e

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 5 - t + u - t + \frac{1}{2}u - \frac{t+3}{4} = 0 \\ u - t + u - \frac{t+3}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} 9t - 6u = 17 \\ 3t - 4u = -3 \end{cases}$$

che ha per soluzione

$$\begin{cases} t = \frac{43}{9} \\ u = \frac{13}{9} \end{cases}$$

a questi valori corrispondono in punti

$$A = (-\frac{43}{9}, \frac{43}{9}, \frac{35}{9}), B = (-5, \frac{13}{3}, \frac{13}{3}).$$

La retta passante per questi due punti è la retta desiderata ed ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -5 + (-5 + \frac{43}{9})t \\ y = \frac{13}{3} + (\frac{13}{3} - \frac{43}{9})t \\ z = \frac{13}{3} + (\frac{13}{3} - \frac{35}{9})t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 - \frac{2}{9}t \\ y = \frac{13}{3} - \frac{4}{9}t \\ z = \frac{13}{3} + \frac{4}{9}t \end{cases}$$

o anche

$$\begin{cases} x = -5 - t \\ y = \frac{13}{3} - 2t \\ z = \frac{13}{3} + 2t \end{cases}$$

5. Dimostrare che se X è un vettore colonna ed è un autovettore per la matrice $A \in M_{n \times n}$ relativo all'autovalore $\lambda = 3$ allora X è anche autovettore per la matrice $A^2 + A + I_n$ relativo all'autovalore 13.

Soluzione.

Infatti, se $AX = 3X$ allora abbiamo che $(A^2+A+I)X = A(AX)+AX+X = A(3X) + 3X + X = 9X + 3X + X = (9 + 3 + 1)X = 13X$.

6. Data la retta $r : x + y + 1 = 0$ e il punto $F(2, 2)$, scrivere l'equazione del luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ del piano che soddisfano la relazione

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pr}} = 2$$

Riconoscere il tipo di curva così ottenuto. Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento in modo tale che l'equazione della curva abbia forma canonica (non è necessario scrivere la relativa forma canonica).

Soluzione. Usando le formule per la distanza tra due punti e per la distanza punto-retta abbiamo

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}}{\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}} = 2$$

ossia

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} &= \frac{2|x+y+1|}{\sqrt{2}} \\
(x-2)^2 + (y-2)^2 &= 2(x+y+1)^2 \\
(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4) &= 2(x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y) \\
x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 &= 2x^2 + 2y^2 + 2 + 4xy + 4x + 4y \\
x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 8y - 6 &= 0
\end{aligned}$$

L'equazione cercata è

$$\boxed{x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 8y - 6 = 0}$$

La conica ottenuta è evidentemente generale e si tratta di una iperbole perché ha eccentricità maggiore di 1.

Per trovare il cambiamento richiesto occorre determinare il centro della conica. La matrice della conica è

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamone il centro mediante le formule $\left(\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}}, \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}}\right)$:

$$\alpha_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \alpha_{01} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad \alpha_{02} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

La retta passante per il fuoco $F(2, 2)$ e il centro $C(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ ha chiaramente equazione $x = y$. La retta passante per C e perpendicolare a questa ha equazione $(x + \frac{4}{3}) + (y + \frac{4}{3}) = 0$, cioè $3x + 3y + 8 = 0$. Scegliamo ora il nuovo riferimento in modo che la retta $x - y = 0$ sia il nuovo asse x' (quindi di equazione $y' = 0$) e la retta $3x + 3y + 8 = 0$ sia il nuovo asse y' (di equazione $x' = 0$). "In prima approssimazione" poniamo quindi

$$\begin{cases} x' = 3x + 3y + 8 \\ y' = x - y \end{cases}$$

Questa trasformazione però non è ortogonale: occorre normalizzare.

$$\begin{cases} x' = \frac{3x+3y+8}{3\sqrt{2}} \\ y' = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Infine, occorre esprimere le x, y in funzione delle x', y' e quindi dobbiamo invertire la trasformazione. Questo è semplice in quanto la matrice del cambiamento è ortogonale, pertanto invertire equivale a trasporre la matrice. Otteniamo

$$\begin{cases} x = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} - \frac{4}{3} \\ y = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} - \frac{4}{3} \end{cases}$$

Sostituendo ora queste espressioni di x e y nell'equazione

$$x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 8y - 6 = 0$$

abbiamo la forma canonica

$$\frac{x'^2}{\frac{50}{9}} - \frac{y'^2}{\frac{50}{3}} = 1$$