Cognome e Nome in stampatello:____________________________________.

Data: 7 giugno 2016

ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio, usare eventualmente anche il retro del foglio. Non aggiungere altri fogli. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa e sintetica.

1. Si consideri l'endomorfismo $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $L(x, y, z) = (4x + 6y, -3x - 5y, -3x - 6y - 5z)$. Dire se L è invertibile o meno. Determinare una matrice di L. Calcolarne autovalori e autovettori. Stabilire se essa è diagonalizzabile o meno ed eventualmente determinare la sua forma diagonale.

Soluzione.

Rispetto alla base canonica la matrice dell'endomorfismo è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Il determinante di questa matrice vale 10 ed è quindi diverso da zero e dunque l'endomorfismo è invertibile ne segue che il nucleo è zero e l'immagine è tutto $\mathbb{R}^3$.

Consideriamo
$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda + 5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda + 5 \end{vmatrix}$$

si ottiene il polinomio caratteristico $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10$ che si fattorizza in $(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 5)$ da cui i tre autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -5$. Essendo i tre autovalori distinti sappiamo che l'endomorfismo è diagonalizzabile. Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La forma diagonale desiderata è

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sia dato il numero complesso $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di z^{101}.

Soluzione.

Per prima cosa scriviamo il numero nella forma trigonometrica, osservando che il suo modulo è 1 e il suo argomento è $\frac{\pi}{4}$:

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} z^{101} &= \cos\left(\frac{101\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{101\pi}{4}\right) \\ &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -z \end{aligned}$$

Ne segue che la parte reale è $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ed è uguale alla parte immaginaria.

3. Nello spazio vettoriale $M(2\times 2)$ delle matrici di ordine 2 a coefficienti reali, si consideri l'endomorfismo $T : M(2\times 2) \to M(2\times 2)$ definito da $T(A) = A - A^T$, dove $A \in M(2 \times 2)$.

1. Calcolare $T(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix})$.
2. Calcolare la traccia e il determinante di T.
3. Determinare una base per il nucleo e una per l'immagine di T.

Soluzione.

1. Calcoliamo $T(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix})$:

$$T(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Determiniamo una matrice che rappresenti l'endomorfismo fissando una base ordinata. Per esempio, prendiamo, con le solite notazioni, la base

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

Calcoliamo:

$$T(E_{11}) = 0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{12}) = E_{12} - E_{21} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_21) = E_{21} - E_{12} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{22}) = 0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi la matrice

$$M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ha evidentemente che la traccia è 2 e il determinante è 0 (ci sono due colonne nulle).

3. Per studiare il nucleo possiamo risolvere il SLO che ha la matrice $M(T)$ come matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tale matrice ha evidentemente rango 1 . Il SLO è dunque

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui tre soluzioni indipendenti sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ una base del nucleo è quindi costituita da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda una base dell'immagine di T, il Teorema delle dimensioni ci dice che $\dim M(2 \times 2) = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$ e quindi $4 = 3 + \dim \operatorname{Im} T$, da cui $\dim \operatorname{Im} T = 1$. Per determinare la base basta scegliere, tra le colonne della matrice T, quella che corrisponde al pivot di T e quindi la seconda. Abbiamo quindi che una base di $\operatorname{Im} T$ è costituita dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Si consideri nel piano euclideo la retta r di equazione $3x+4y-1=0$. Si scrivano le equazioni cartesiane del luogo geometrico di tutti i punti dl piano aventi distanza 1 dalla retta r

Soluzione.

Un punto generico del piano $P(x,y)$ ha distanza 1 dalla retta r se e solo se esso soddisfa l'equazione

$$\frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{9+16}}=1$$

da cui $|3x+4y-1|=5$ e quindi si hanno due rette parallele alla retta r di equazioni $3x+4y-6=0$ e $3x+4y+4=0$.

5. Se $A \in M(3 \times 5)$ spiegare perché le colonne di A devono essere linearmente dipendenti.

Soluzione.

La matrice in questione ha rango minore o uguale a 3 e quindi ci sono al più 3 righe o colonne indipendenti. L'insieme delle cinque colonne deve quindi necessariamente essere dipendente.

6. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato da $(1,-1,1,-1,1)$ e $(1,2,-2,-1,0)$ e W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Determinare una base del sottospazio $U \cap W$.

Soluzione.

Per prima cosa scriviamo le equazioni cartesiane di U imponendo che

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

A tal fine, utilizzando il teorema degli orlati, fissiamo l'attenzione sul minore di ordine due non nullo composto dalle ultime due righe e dalle ultime due colonne e richiediamo che

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_4 & x_5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

che sono le equazioni cartesiane del sottospazio U desiderate.

Ora possiamo determinare la base del sottospazio $U \cap W$ studiando il sistema

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

La matrice di questo sistema (lineare omogeneo) è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Possiamo determinare, ad esempio mediante delle operazioni elementari, che il rango di questa matrice è 5 e quindi il SLO ammette solo la soluzione banale. In conclusione lo spazio intersezione è lo spazio nullo e dunque ha base vuota.