Esercizio. **Verificare che le rette $r : x - y + z = 2x - y - 1 = 0$ e $s : x + y = z = 0$ sono sghembe. Calcolarne la distanza e determinare la retta di minima distanza.**

Soluzione. Scriviamo il determinante 4×4 con i coefficienti delle equazioni ottenendo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

e dunque le rette sono sghembe. Per la distanza applichiamo la formula col prodotto misto:

$$\text{distanza} = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}$$

Conviene ricavarsi le equazioni parametriche di r e s. Per far ciò risolviamo i sistemi che ne definiscono le equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -t \\ 2x - y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -t \\ 2x - y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

e infine le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

Analogamente quelle di s sono

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

La formula per la distanza può quindi essere scritta

$$\frac{1}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|} \; | \begin{vmatrix} 0-1 & 0-1 & 0-0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} | = \frac{2}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}$$

Inoltre:

$$\vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

e $\|\vec{r} \wedge \vec{s}\| + \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$.

La distanza cercata è quindi $\frac{2}{\sqrt{11}}$.

In alternativa, la distanza poteva anche essere calcolata col metodo dei punti mobili che fornisce, in aggiunta, anche la retta di minima distanza.

Prendo il punto mobile su r: $P_0(1+t, 1+2t, t)$, quello mobile su s: $P_1(-t', t', 0)$ e il vettore mobile $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} -t' - 1 - t \\ t' - 1 - 2t \\ -t \end{pmatrix}$. Impongo la condizione di ortogonalità con $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$. Troviamo

$$\begin{cases} (-t' - 1 - t) + 2(t' - 1 - 2t) - t = 0 \\ -(-t' - 1 - t) + (t' - 1 - 2t) = 0 \end{cases}$$

semplificando

$$\begin{cases} t' - 6t - 3 = 0 \\ 2t' - t = 0 \end{cases}$$

da cui $t = -\frac{6}{11}, t' = -\frac{3}{11}$. I punti corrispondenti sono allora $P_0(-\frac{6}{11}) = (-\frac{6}{11} + 1, 1 - \frac{12}{11}, -\frac{6}{11})$ ossia

$$P_0(\frac{5}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{6}{11}) \text{ e } P_1(\frac{3}{11}, -\frac{3}{11}, 0)$$

La distanza è allora

$$\sqrt{(\frac{3}{11} - \frac{5}{11})^2 + (\frac{3}{11} - \frac{1}{11})^2 + (0 + \frac{6}{11})^2}$$

$$\sqrt{(\frac{2}{11})^2 + (\frac{2}{11})^2 + (\frac{6}{11})^2} = \frac{\sqrt{44}}{11} = \frac{2}{\sqrt{11}}$$

come in precedenza.

Ora possiamo calcolare la retta di minima distanza prendendo la retta passante per i due punti appena determinati. I parametri direttori sono $\ell = -\frac{2}{11}, m = -\frac{2}{11}, n = \frac{6}{11}$ o, equivalentemente, $\ell = -1, m = -1, n = 3$ (ovviamente proporzionali al prodotto vettoriale calcolato prima) e dunque

$$\begin{cases} x = \frac{5}{11} - t \\ y = -\frac{1}{11} - t \\ z = -\frac{6}{11} + 3t \end{cases}$$

è la retta incidente e perpendicolare alle due rette assegnate r e s.