Esercizio. Data la quadrica di equazione $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4x - 2y - 6z - 9 = 0$, riconoscerne il tipo. Verificare che $A(1, -1, 0) \in S$. Scrivere l'equazione del piano contenente le rette tangenti ad S in A (piano tangente).

Soluzione. Completiamo i quadrati:

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 4x) + 2(y^2 - y) - (z^2 + 6z) &= 9 \\
(x^2 + 4x + 4) + 2(y^2 - y + \frac{1}{4}) - (z^2 + 6z + 9) &= 9 + 4 + \frac{1}{2} - 9 \\
(x + 2)^2 + 2(y - \frac{1}{2})^2 - (z + 3)^2 &= \frac{9}{2}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Posto ora $X = x + 2, Y = y - \frac{1}{2}, Z = z + 3$ abbiamo l'equazione in forma canonica $X^2 + 2Y^2 - Z^2 = \frac{9}{2}$ ossia $\frac{X^2}{9/2} + \frac{Y^2}{9/4} - \frac{Z^2}{9/2} = 1$. Riconosciamo che si tratta quindi di un iperboloide iperbolico o a una falda.

Pr verificare che $A \in S$ basta sostituire le sue coordinate nell'equazione: $1 + 2 + 4 + 2 - 9 = 0$ e l'equazione è soddisfatta.

Una generica retta per A è del tipo

$$
\begin{cases}
x = 1 + \ell t \\
y = -1 + mt \\
z = nt
\end{cases}
$$

Questa interseca la superficie in

$$
\begin{aligned}
(1 + \ell t)^2 + 2((-1 + mt)^2 - (nt)^2 + 4(1 + \ell t) + (-2(-1 + mt) - 6nt - 9 &= 0 \\
1 + \ell^2 t^2 + 2\ell t + 2(1 + m^2 t^2 - 2mt) - n^2 t^2 + 4 + 4\ell t + 2 - 2mt - 6nt - 9 &= 0 \\
(\ell^2 + 2m^2 - n^2)t^2 + (2\ell - 4m + 4\ell - 2m - 6n)t &= 0 \\
(\ell^2 + 2m^2 - n^2)t^2 + (6\ell - 6m - 6n)t &= 0 \\
(\ell^2 + 2m^2 - n^2)t^2 + 6(\ell - m - n)t &= 0
\end{aligned}
$$

Osserviamo che per $t = 0$ abbiamo proprio il punto A come intersezione. Inoltre tale soluzione è doppia se $\ell - m - n = 0$. Dunque le rette tangenti sono tutte e sole quelle per cui $\ell = m + n$. Ce ne sono ∞^1. Esse hanno equazioni parametriche

$$
\begin{cases}
x = 1 + mt + nt \\
y = -1 + mt \\
z = nt
\end{cases}
$$

Dalla seconda e terza equazione ricaviamo mt e nt e sostituiamo nella prima ottenendo: $x = 1 + (y + 1) + z$. Il piano tangente cercato è quindi

$$
\boxed{x - y - z - 2 = 0}
$$