1 Esempi

Determinare la matrice rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ dell'endomorfismo $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ che associa ad ogni polinomio la sua derivata.

Soluzione.

$$1 \mapsto 0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \mapsto 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2 \mapsto 2x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^3 \mapsto 3x^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Otteniamo la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come verifica, prendiamo $p = 5x^3 + 6x^2 + x + 3$ e calcoliamo $D(5x^3 + 6x^2 + x + 3)$ usando le coordinate e la matrice $M_{\mathcal{B}}(D)$.

Per prima cosa occorre trasformare il polinomio dato nelle sue coordinate:

$$5x^3 + 6x^2 + x + 3 \overset{\chi_{\mathcal{B}}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Poi moltiplichiamo la colonna delle coordinate per la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quest'ultima colonna va reinterpretata come polinomio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\chi_{\mathcal{B}}^{-1}}{\mapsto} 1 + 12x + 15x^2$$

che in effetti è la derivata richiesta. La verifica è completa.

Determinare la matrice rispetto alla base $\mathcal{B}' = (x - 1, x, x^2 + 2x, x^3 + x + 1)$ dell'endomorfismo $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ che associa ad ogni polinomio la sua derivata. Si tratta di ripetere l'esercizio rispetto alla nuova base $\mathcal{B}'$.

Verifichiamo preliminarmente che i quattro vettori presi costituiscono effettivamente una base di $\mathbb{P}_3$. Sappiamo gia' che la dimensione di $\mathbb{P}_3$ è 4. Basta quindi verificare che i 4 vettori presi sono linearmente indipendenti. A tal fine scriviamo

$$a(x - 1) + bx + c(x^2 + 2x) + d(x^3 + x + 1) = 0$$

Ne dobbiamo dedurre che tutti i coefficienti sono nulli: $a = b = c = d = 0$. Infatti, sviluppando abbiamo

$$ax - a + bx + cx^2 + 2cx + dx^3 + dx + d = 0$$

Raccogliendo e ordinando:

$$dx^3 + cx^2 + (d + 2c + b + a)x + (-a + d) = 0$$

Ne segue

$$\begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ d + 2c + b + a = 0 \\ -a + d = 0 \end{cases}$$

da cui segue facilmente che $a = b = c = d = 0$ come desiderato.

Ora possiamo procedere come nell'esercizio precedente. I calcoli sono più laboriosi ma non concettualmente più difficili. A volte la facilità del calcolo può nascondere l'importanza di alcuni dettagli.

$$x-1 \mapsto 1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \mapsto 1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2+2x \mapsto 2x+2 \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^3+x+1 \mapsto 3x^2+1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Otteniamo la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per la verifica prendiamo lo stesso polinomio di prima. Ora però dobbiamo prendere le coordinate in termini della nuova base $\mathcal{B}'$ cioè

$$5x^3+6x^2+x+3 = dx^3+cx^2+(d+2c+b+a)x+(-a+d)$$

confrontando i coefficienti si ottiene

$$\begin{cases} d=5 \\ c=6 \\ d+2c+b+a=1 \\ -a+d=3 \end{cases}$$

da cui otteniamo $a=2, b=-18, c=6, d=5$ ossia la colonna

$$\chi_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 2 \\ -18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ora moltiplichiamo la matrice $M_{\mathcal{B}}(D)$ per questa colonna

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Queste sono le coordinate del vettore rispetto alla base $\mathcal{B}'$ vale a dire

$$-1(x-1)+(-17)x+15(x^2+2x)=15x^2+12x+1$$

come ci aspettavamo.