La dimensione di un sottospazio vettoriale è definita come il numero di vettori di una base del sottospazio. Essa dipende non solo dal sottospazio come insieme ma anche dal campo su cui scegliamo gli scalari

Nel nostro corso prendiamo quasi sempre gli scalari come numeri reali, si parla allora di spazi vettoriali *reali*. Tuttavia, gli scalari possono essere presi su un campo qualsiasi, per esempio $\mathbb{C}$ (numeri complessi) o $\mathbb{Q}$ (numeri razionali). Esistono anche campi finiti che non abbiamo introdotto a lezione, per esempio, un campo finito, il più piccolo possibile, è il campo con due soli elementi: $\mathbb{F}_2$. Il campo $\mathbb{F}_2$ è composto da due soli elementi denotati 0 e 1 con le operazioni

$$0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 0 + 0 = 0, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$$

<u>Esempio: quanto vale $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$?</u> La risposta è 2 perché, ad esempio, una base è costituita dai due vettori $1, i$. Infatti:

Generano? Certo: ogni numero complesso è della forma $a + bi$ e quindi è combinazione lineare di 1 e i.

Sono indipendenti? Certo: se $a + bi = 0$ necessariamente $a = 0, b = 0$.

<u>Esempio: quanto vale $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$?</u> La risposta è 1 perché, ad esempio, una base è costituita dal solo vettore 1.

Ogni vettore $z \in \mathbb{C}$ si può scrivere come $z \cdot 1$ e 1, essendo un vettore non nullo, è indipendente.

<u>Esempio: quanto vale $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$?</u> La risposta è 1 come nel caso appena visto.

<u>Esempio: quanto vale $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$?</u> Stavolta la risposta è meno scontata. Forse si intuisce che debba essere infinito perché ci sono i numeri irrazionali, ma come giustificare una cosa del genere in maniera chiara e semplice?

Una possibilità è la seguente. Si consideri l'insieme, infinito, dei numeri primi: $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$ e si prenda l'insieme dei logaritmi di questi numeri primi:

$$\{\log p_1, \log p_2, \ldots\}$$

Tutti questi numeri sono vettori indipendenti di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$. Infatti, illustriamo il ragionamento con tre di questi vettori per semplictà ma sarà chiaro che il ragionamento si può ripetere con un numero arbitrariamente grande di questi vettori. Consideriamo la combinazione lineare

$$a_1 \log p_1 + a_2 \log p_2 + a_3 \log p_3 = 0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$$

vogliamo dedurre che i coefficienti a_1, a_2, a_3 sono tutti nulli. Osserviamo che essendo i coefficienti razionali, cioè $a_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $a_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $a_3 = \frac{m_3}{n_3}$, con m_i, n_i interi, si può pensare di moltiplicare la relazione per il minimo comune multiplo dei denominatori e supporre quindi di avere una relazione

$$k_1 \log p_1 + k_2 \log p_2 + k_3 \log p_3 = 0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

in cui i coefficienti k_1, k_2, k_3 sono interi.

Ora utilizziamo le proprietà dei logaritmi per riscrivere la relazione precendente come

$$\log p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} = 0$$

ossia

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} = 1$$

Se gli esponenti k_1, k_2, k_3 sono positivi l'unica maniera di ottenere 1 da un prodotto di potenze di primi è se gli esponenti sono nulli. Se k_1, k_2 sono positivi mentre k_3 è negativo, ad esempio, allora $-k_3$ è positivo e possiamo scrivere

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} = p_3^{-k_3}$$

e, di nuovo, ciò implica che $k_1, k_2, k_3 = 0$. Questo dimostra l'indipendenza di questi tre vettori. Il ragionamento si può ripetere con un numero qualunque di questi vettori. Questo dimostra che $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.