Cognome e Nome (stampatello):____________________________________.

Data: 12 gennaio 2017

ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio, usare eventualmente anche il retro del foglio. Non aggiungere altri fogli. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa e sintetica.

1. Calcolare la migliore approssimazione del polinomio $p(x) = (x+1)^2$, rispetto al prodotto scalare $(p(x)|q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(2)q(2)$, contenuta nel sottospazio U generato da x e x^2.

Soluzione. Applichiamo Gram-Schmidt alla base $\{x, x^2\}$ del sottospazio U ottenendo la base ortogonale $x, x^2 - \frac{4}{3}x$. La migliore approssimazione richiesta si trova allora calcolando la proiezione ortogonale di $p(x)$ su U (si dice anche "sviluppo di Fourier" di $p(x)$) con la formula

$$\frac{(p(x)|x)}{(x|x)}x + \frac{(p(x)|x^2 - \frac{4}{3}x)}{(x^2 - \frac{4}{3}x|x^2 - \frac{4}{3}x)}(x^2 - \frac{4}{3}x)$$

cioè

$$\frac{22}{6}x + \frac{32/3}{22/3}(x^2 - \frac{4}{3}x)$$

$$\frac{16}{11}x^2 + \frac{19}{11}x$$

2. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ -x - y - 2z \end{pmatrix}$$

Determinare una base per $\operatorname{Im} T$ e per $\operatorname{Ker} T$. Dire se l'applicazione è iniettiva e/o suriettiva. Calcolare $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare tutti i vettori di $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soluzione. Per il nucleo studiamo il SLO

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $\begin{pmatrix} -s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix}$ al variare di $s, t \in \mathbb{R}$ ed una base del nucleo è costituita, per esempio, da

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Di qui segue che T non è iniettiva perché ha un nucleo non nullo. Dal Teorema delle dimensioni ricaviamo che la dimensione di $\operatorname{Im} T$ è 1 ed una base quindi è costituita da un qualunque suo vettore non nullo. Per esempio,

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ne segue anche che T non è suriettiva perché l'immagine ha dimensione 1 e non può essere quindi l'intero spazio $\mathbb{R}^2$. Infine per determinare la controimmagine di $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

ottenendo $\{(-1 - y - 2z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$.

3. Si consideri la retta r di equazione $x - y + 1 = 0$ ed un suo punto arbitrario $P(a, b)$.

1. Calcolare l'equazione della retta p passante per P e perpendicolare a r.
2. Si calcoli l'intersezione Q di p con l'asse delle y.
3. Si consideri poi la retta q parallela all'asse x passante per il punto di intersezione trovato al passo precedente.
4. Si calcoli infine la retta s passante per l'origine e per P e l'intersezione S di s e q.
5. Riconoscere che, al variare di $P \in r$, il punto S descrive un'iperbole. Determinare centro e asintoti dell'iperbole.

Soluzione.

1. $p : (x - a) + (y - b) = 0$ è la retta per P con i parametri direttori uguali a 1: $x + y - a - b = 0$.

2. $$\begin{cases} x + y - a - b = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

   da cui $Q(0, a + b)$.

3. La retta q desiderata è $y = a + b$.

4. La retta OP è $bx - ay = 0$ e l'intersezione con q è data da

   $$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ y = a + b \end{cases}$$

   ricordando inoltre che $P \in r \iff P(a, a + 1)$ abbiamo il sistema

   $$\begin{cases} (a + 1)x - ay = 0 \\ y = 2a + 1 \end{cases}$$

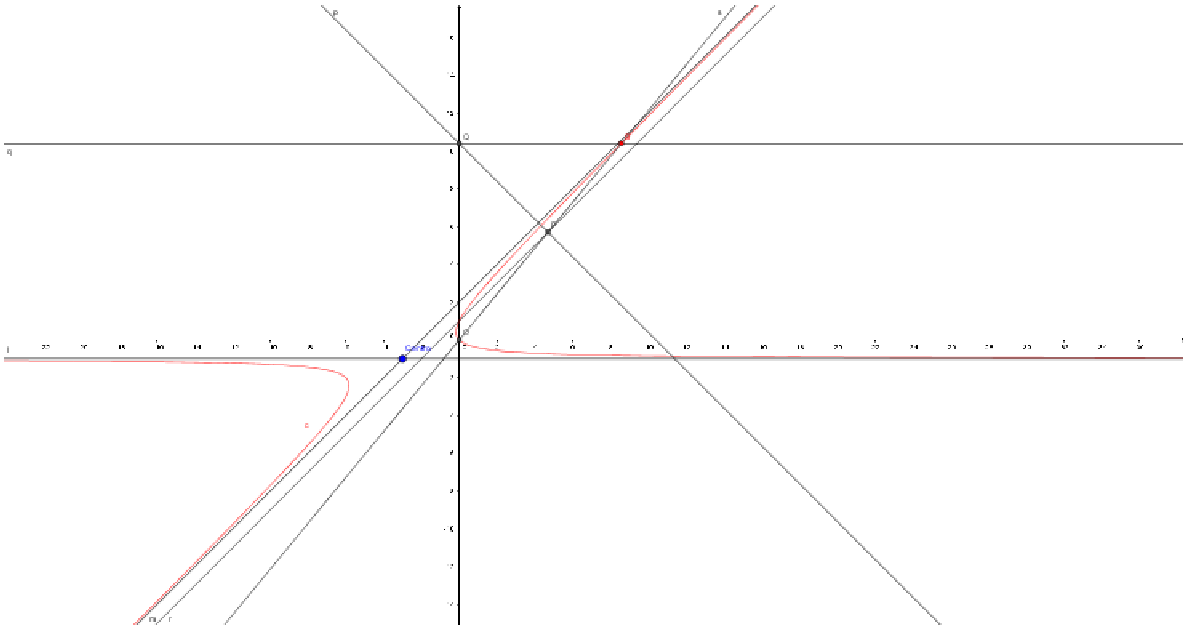
5. Eliminando ora il parametro a da queste equazioni, per esempio ricavando a dalla seconda equazione, $a = \frac{y-1}{2}$, e sostituendo nella prima si ha

   $$xy + x - y^2 + y = 0$$

   Questa è una equazione algebrica di secondo grado e quindi il luogo di punti studiato è una conica. La matrice della conica è

   $$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

   che ha determinante diverso da zero, per cui la conica è generale. Infine essendo $\det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}$ (negativo), si tratta di un'iperbole. Per trovare il centro utilizziamo le formule e troviamo $(-3, -1)$. Infine, i parametri direttori degli asintoti si trovano risolvendo l'equazione $\ell m - m^2 = 0$ da cui $m = 0$ e $\ell = m = 1$. Abbiamo quindi gli asintoti $y = -1$ e $(x + 3) - (y + 1) = 0$ ossia $x - y + 2 = 0$



Iperbole

4. Scrivere una parametrizzazione dell'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$ in modo che la curva sia percorsa in senso

1. orario
2. antiorario

Soluzione.

Riscriviamo l'equazione nella forma $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Un parametrizzazione in senso orario è data da $(3\sin t, 2\cos t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Mentre quella in senso antiorario è $(3\cos t, 2\sin t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

5. Determinare le coordinate del vettore $p(x) = 2 - x + 3x^2$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = (1 + x, 1 - x, x^2)$.

Soluzione. Basta porre

$$2 - x + 3x^2 = a(1 + x) + b(1 - x) + cx^2$$

da cui si ricava il sistema
$$\begin{cases} c = 3 \\ a - b = -1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$
che ha soluzione $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3)$.

6. Determinare una base per lo spazio delle righe della matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 7 & -9 & 0 \\ 10 & 3 & -3 \\ -9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione.</u>

Basta trovare la forma ridotta a gradini della matrice che è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{37} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{37} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui una base dello spazio delle righe è costituita dalle prime due righe della matrice.