Cognome e Nome (stampatello):______________________________________.

Numero di Matricola :____.

Data: 9 febbraio 2017

ISTRUZIONI. Durata della prova: 3 ore. Si può decidere di ritirarsi anche all'ultimo momento. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio, usare eventualmente anche il retro del foglio. Non aggiungere altri fogli. La soluzione deve essere leggibile, completa e sintetica. I risultati, insieme ad un calendario delle prove orali, appariranno sulla pagina web del docente entro pochi giorni.

Qualche formula che potrebbe essere utile:

$$t^2 + \frac{\alpha_{00}\mathcal{I}}{\mathcal{A}}t + \frac{\alpha_{00}^3}{\mathcal{A}^2} = 0 \tag{1}$$

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{-\mathcal{I}^3}{4\mathcal{A}}} \tag{2}$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{|\vec{r} \wedge \vec{s}|} \tag{3}$$

1. Si considerino le due rette $r : 3x - 4y = 5$ e $s : 5x + 12y = 13$, entrambe orientate nel verso delle x-crescenti.
   (a) Calcolare i coseni direttori dei versori delle due rette concordi con l'orientazione scelta.
   (b) Calcolare il coseno dell'angolo acuto θ compreso tra le due rette.
2. Sia $\mathbb{P}_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, nell'indeterminata x, di grado minore o uguale a 2. Lo spazio $\mathbb{P}_2$ è uno spazio euclideo rispetto al prodotto scalare $(p(x)|q(x)) = p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(-1)q(-1)$.
   (a) Determinare i polinomi di Lagrange che costituiscono una base ortonormale per questo spazio euclideo.
   (b) Esprimere il polinomio $p(x) = (x + 1)^2$ come combinazione lineare dei polinomi di Lagrange trovati.

3. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -x-2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinare una base per $\operatorname{Im} T$ e per $\operatorname{Ker} T$. Dire se l'applicazione è iniettiva e/o suriettiva. Calcolare $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare tutti i vettori di $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tali che $T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Si considerino le rette r ed s di equazioni, rispettivamente:

$$r : \begin{cases} y+z=1 \\ x=2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y-z=3 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

   (a) Verificare che r e s sono sghembe.
   (b) Calcolare la distanza di r da s.

5. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard. Determinare una base per il complemento ortogonale del sottospazio U generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & k & -2 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix}$. Si consideri la conica corrispondente a questa matrice. Rispondere alle seguenti domande (giustificando la risposta):

   (a) Per quali valori di k si ottiene una conica degenere?
   (b) Per quali valori di k si ha un'iperbole, una parabola, o un'ellisse?
   (c) Calcolare la forma canonica e l'eccentricità nel caso in cui $k = -\frac{5}{2}$.
   (d) *Facoltativo: Disegnare la conica che si ottiene per* $k = -\frac{3}{2}$.