Cognome e Nome in stampatello:________________________.

Data: 12 febbraio 2018

**ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio, usare eventualmente anche il retro del foglio. Non aggiungere altri fogli. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa e sintetica. I risultati dello scritto insieme ad un calendario degli orali appariranno sulla mia pagina web entro pochi giorni**

**1.** Verificare il Teorema di Cayley-Hamilton usando la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$C_A(x) = x^2 + 3x - 6$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 3A - 6I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**2.** Sia $\gamma$ la curva parametrica di equazioni

$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \qquad t \in [-10, 10].$$

Verificare che $\gamma$ è un arco di curva regolare e calcolare l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = 1$.

$\gamma' : \begin{cases} x' = 3t^2 + 1 \\ y' = -1 \end{cases}$ $\quad |\gamma'| \neq 0$ arco regolare

Per $t = 1$ il punto è $\gamma(1) : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

e $\gamma'(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; la retta tangente è quindi

$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 0 - t \end{cases}$ ossia $x + 4y = 2$ in forma cartesiana.

**3.** Sia $M(2\times 2)$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine due e $\mathbb{P}_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Consideriamo l'applicazione lineare $T$ definita da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a-b)+(b-d)x+dx^2$$

dove $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Determinare una matrice che rappresenta $T$ e calcolare una base per il nucleo e una per l'immagine di $T$.

Fissiamo la base $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

di $M(2\times 2)$ e la base $\mathcal{D}=\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{P}_2$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\longmapsto 1 \xrightarrow{\chi} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\longmapsto -1+x \xmapsto{\chi} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

da cui $M(T)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\longmapsto 0 \longmapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\longmapsto -x+x^2 \longmapsto \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Nucleo: $\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \\ x_4=0\end{cases}$ $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_4=0\end{cases}$ $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\t\\0\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}\right\}$

base: $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ossia

$\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ base del nucleo

Im: Considero le colonne $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ ossia i polinomi

$\{1, -1+x, -x+x^2\}$ che costituiscono una base dell'immagine.

**4.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

1. Determinare gli autovalori e i relativi autovettori della matrice $A$;
2. Determinare una matrice ortogonale $P$ tale che $P^T AP = D$ sia diagonale;
3. Qual è $D$?

Il polinomio caratteristico è

$$(\lambda^2 - 6\lambda - 7)(\lambda^2 + 2\lambda - 24).$$

che ha radici $7, -6, 4, -1$ e autovettori, rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La matrice P è $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

si ha $P^T AP = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. Siano $r$ e $s$ le rette di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ y = 2t_1 \\ z = -1 + t_1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -5 + 7t_2 \\ y = 2 - 4t_2 \\ z = -1 + 3t_2 \end{cases}$$

Calcolare la distanza tra $r$ e $s$.

In forma cartesiana abbiamo: $r: \begin{cases} x = 1+y \\ z = -1+\frac{y}{2} \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = \frac{7}{3}z - \frac{8}{3} \\ y = -\frac{4}{3}z + \frac{2}{3} \end{cases}$

Il det $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{29}{3} \neq 0$, si tratta dunque di due rette sghembe

Per la distanza applichiamo $\text{dist} = \dfrac{|\vec{PQ} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{|\vec{r} \wedge \vec{s}|}$

dove $P \in r$, $Q \in s$, $\vec{r}$ direzione di $r$, $\vec{s}$ di $s$. Scegliamo $P(1,0,-1)$ $Q(-5,2,1)$:

$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{PQ} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -58$ $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{s} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + \vec{j} - 22\vec{k}$ e dunque

$$\text{dist} = \frac{58}{\sqrt{10^2+1^2+22^2}} = \frac{58}{\sqrt{585}} \simeq 2.4$$

**6.** Scrivere l'equazione cartesiana della retta $r$ passante per $P_1(1,2,3)$ e $P_2(3,0,1)$. Scrivere inoltre l'equazione del piano $\pi$ perpendicolare a $r$ e passante per il punto medio tra $P_1$ e $P_2$.

L'eq. parametrica è $\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = 3-2\lambda \end{cases}$ eliminando il parametro $\lambda$

$\frac{x-1}{2} = \lambda$

$y = 2-(x-1) \quad y = -x+3$

$z = 3-(x-1) \quad z = -x+4$

otteniamo $\begin{cases} y = -x+3 \\ z = -x+4 \end{cases}$

Il punto medio $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (2,1,2)$

e il piano richiesto è

$$2(x-2) - 2(y-1) - 2(z-2) = 0$$

$2x - 2y - 2z - 4 + 2 + 4 = 0$

$2x - 2y - 2z + 2 = 0$

$x - y - z + 1 = 0$

ossia $\boxed{x - y - z + 1 = 0}$