

Cognome e Nome in stampatello: _____.

Data: 12 febbraio 2018

ISTRUZIONI. Riportare le soluzioni in bella copia negli spazi appositi sotto ciascun esercizio, usare eventualmente anche il retro del foglio. Non aggiungere altri fogli. La soluzione deve essere leggibile, corretta, completa e sintetica. I risultati dello scritto insieme ad un calendario degli orali appariranno sulla mia pagina web entro pochi giorni

1. Verificare il Teorema di Cayley-Hamilton usando la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$C_A(x) = x^2 + x - 14$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -2 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + A - 14I = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -2 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sia γ la curva parametrica di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t^3 - t \end{cases} \quad t \in [-10, 10].$$

Verificare che γ è un arco di curva regolare e calcolare l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = 1$.

$$\gamma': \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 6t^2 - 1 \end{cases} \quad |\gamma'| \neq 0 \text{ arco regolare}$$

Per $t = 1$ il punto è $\gamma(1): \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

e $\gamma'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; la retta tangente è

quindi $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$ ossia $5x - y = 9$
in forma cartesiana.

3. Sia \mathbb{P}_2 lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e $M(2 \times 2)$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine due. Consideriamo l'applicazione lineare T definita da

$$a + bx + cx^2 \mapsto \begin{pmatrix} a+c & a+b \\ a+b & a+c \end{pmatrix}$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinare una matrice che rappresenta T e calcolare una base per il nucleo e una per l'immagine di T .

Fissiamo la base $B = \{1, x, x^2\}$ di \mathbb{P}_2

e $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $M(2 \times 2)$

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nucleo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

$\left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ ossia $\{-1+x+x^2\}$ è una base di $\ker T$

Im: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base dell'immagine.

4. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Determinare gli autovalori e i relativi autovettori della matrice A ;
2. Determinare una matrice ortogonale P tale che $P^T A P = D$ sia diagonale;
3. Qual è D ?

Il polinomio caratteristico è

$$(\lambda^2 - 6\lambda + 5)(\lambda^2 + 4\lambda + 3)$$

che ha radici $5, -3, -1, 1$
e autovettori, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P è $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e si ha

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Siano r e s le rette di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = 2t_1 \\ y = 1 + 2t_1 \\ z = 1 - 2t_1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -2 + 6t_2 \\ y = 2 \\ z = 2 + t_2 \end{cases}$$

Calcolare la distanza tra r e s .

Le forme cartesiane delle rette \tilde{e} , $r: \begin{cases} y = 1 + x \\ z = 1 - x \end{cases}$, $s: \begin{cases} y = 2 \\ z = \frac{x}{6} + \frac{7}{3} \end{cases}$

Il determinante \tilde{e} $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{6} & 0 & -1 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \neq 0$ e dunque le rette sono sghembe.

Per trovare la distanza applichiamo $dist = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{|\vec{r} \wedge \vec{s}|}$

dove $P \in r$, $Q \in s$, \vec{r} vett. di direz. di r ,

\vec{s} vett. di direz. di s . Scegliamo $P(0, 1, 1)$ $Q(-2, 2, 2)$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -30, \quad \vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 14\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$dist = \frac{30}{\sqrt{2^2 + 14^2 + 12^2}} = \frac{30}{2\sqrt{86}} = \frac{15}{\sqrt{86}} \approx 1.6$$

6. Scrivere l'equazione cartesiana della retta r passante per $P_1(1, -2, 3)$ e $P_2(4, 1, -2)$. Scrivere inoltre l'equazione del piano π perpendicolare a r e passante per il punto medio tra P_1 e P_2 .

L'eq. parametrica è
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$$

da cui, eliminando il parametro, si ha

$$\begin{cases} x - 1 = y + 2 \\ 5x + 3z = 14 \end{cases} ; \text{ il punto medio è}$$

$$M \left(\frac{1+4}{2}, \frac{-2+1}{2}, \frac{3-2}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

da cui

$$3 \left(x - \frac{5}{2} \right) + 3 \left(y + \frac{1}{2} \right) - 5 \left(z - \frac{1}{2} \right) = 0$$

ovvero

$$\boxed{6x + 6y - 10z = 7}$$