Prova scritta di Geometria - 16 Gennaio 2019

COGNOME e NOME(stampatello): ______________________________

1. Supponiamo di sapere che l'invariante cubico di una conica è $\mathcal{A} = 24$, quello quadratico è $\alpha_{00} = 3$, e quello lineare è $\mathcal{I} = -4$.

   (a) Classificare la conica;

   (b) Scrivere la sua equazione canonica;

   (c) Determinare le coordinate dei fuochi e l'eccentricità .

   Soluzione.

   (a) L'invariante cubico non è zero: Conica generale.

   Invariante cubico maggiore di 0: ellisse. Abbiamo quindi un'ellisse generale.

   (b) La sua equazione canonica è $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ in cui α e β sono da determinarsi risolvendo l'equazione

$$t^2 + \frac{\alpha_{00}\,\mathcal{I}}{\mathcal{A}}t + \frac{\alpha_{00}^3}{\mathcal{A}^2} = 0$$

   otteniamo

$$t^2 + \frac{3(-4)}{24}t + \frac{(3)^3}{24^2} = 0.$$

   ossia

$$t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{64} = 0$$

   che ha soluzioni $\frac{3}{8}$ e $\frac{1}{8}$. L'equazione canonica è quindi $\frac{3x^2}{8} + \frac{y^2}{8} = 1$.

   (c) Dall'equazione canonica ricaviamo facilmente $c^2 = b^2 - a^2 = \frac{16}{3}$, i fuochi sono dunque $F_1(0, \frac{4}{\sqrt{3}})$ e $F_2(0, -\frac{4}{\sqrt{3}})$ e l'eccentricità è $e = \frac{c}{b} = \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

2. Determinare l'equazione della retta per l'origine ed incidente le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 5 \\ y = -z + 1 \end{cases}$$

Soluzione. La retta deve appartenere ad un piano del fascio

$$\lambda(x - 2z + 1) + \mu(y - z) = 0$$

ma anche al fascio

$$\lambda'(x - 5) + \mu'(y + z - 1) = 0$$

Imponendo che i piani passino per l'origine si ha

$$\lambda = 0$$

e

$$-5\lambda' - \mu' = 0 \implies \lambda' = 1, \mu' = -5$$

Otteniamo di conseguenza la retta di equazioni

$$\begin{cases} y = z \\ x - 5 - 5y - 5z + 5 = 0 \end{cases}$$

o anche

$$s : \begin{cases} y = z \\ x = 10z \end{cases}$$

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & k+1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

   (a) Determinare i valori di k per cui la matrice A è diagonalizzabile.

   (b) Determinare i valori di k per cui la matrice AA^T è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) L'equazione caratteristica della matrice A è $c_A(x) = x^2 - 4x + 2 - 2k = 0$, che ha soluzioni $2 \pm \sqrt{2+2k}$. Se $2 + 2k > 0$ ci sono due autovalori reali e distinti e quindi la matrice è diagonalizzabile sui reali. Se $2 + 2k < 0$ ci sono due autovalori complessi coniugati e quindi la matrice è diagonalizzabile (sui complessi). L'unico caso ancora dubbio è quando $k = -1$ perché in tal caso ci sono due autovalori reali coincidenti uguali a 2. Studiamo quindi il caso $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ -2 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 1. Ne segue che la molteplicità geometrica è 1 mentre quella algebrica è 2: la matrice non è, in questo caso, diagonalizzabile.

(b) Infine: la matrice AA^T è necessariamente simmetrica (infatti la sua trasposta coincide con essa stessa: $(AA^T)^T = AA^T$) e dunque è certamente diagonalizzabile, anzi è ortogonalmente diagonalizzabile, per il Teorema degli Assi Principali.

4. Dire se la seguente permutazione è di classe pari o dispari:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Contiamo le inversioni: $3+0+1+0=4$. La permutazione è pari.

5. Calcolare i coseni direttori della retta passante per i punti $A(1,1,2)$ e $B(2,-3,5)$ e orientata nel verso delle x-decrescenti.

Soluzione.

I parametri direttori si ottengono facendo la differenza delle coordinate, pertanto essi sono proporzionali a

$$\ell = 2-1 = 1, \quad m = -3-1 = -4, \quad n = 5-2 = 3$$

I coseni direttori sono le componenti di un versore parallelo alla retta e quindi quelli della retta con l'orientazione desiderata sono

$$-\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}$$

6. Dato il polinomio $(5x-2)^2 \in \mathbb{P}$, scrivere le coordinate $\chi((5x-2)^2)$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$.

Soluzione. Il polinomio è $(5x-2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$ e le sue coordinate sono

$$\chi((5x-2)^2) = \begin{pmatrix} 25 \\ -20 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7. Quali sono le coordinate omogenee del punto proprio $P(2,5)$?

Soluzione. Ogni terna di numeri (x_0, x_1, x_2) per cui $\frac{x_1}{x_0} = 2$ e $\frac{x_2}{x_0} = 5$ va bene. Per esempio, $(1,2,5)$ oppure $(2,4,10)$ etc.

8. Diagonalizzare ortogonalmente la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. (Determinare la matrice ortogonale diagonalizzante P).

Soluzione. La matrice è simmetrica e quindi diagonalizzabile ortogonalmente. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$$

e quindi gli autovalori sono 9 e -1. L'autospazio relativo a $\lambda = 9$ si trova studiando il SLO di matrice

$$\begin{pmatrix} 9-1 & -4 \\ -4 & 9-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

abbiamo quindi l'equazione $2x - y = 0$. L'autospazio relativo a $\lambda = -1$ è ortogonale a questo e quindi ha equazione $x + 2y = 0$. La matrice ortogonale diagonalizzante è quindi

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Verificare il Teorema di Cayley-Hamilton per la matrice A dell'esercizio precedente.

   Soluzione. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 8\lambda - 9$. Possiamo verificare che $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 32 \\ 32 & 65 \end{pmatrix}$ e quindi

$$A^2 - 8A - 9I = \begin{pmatrix} 17 & 32 \\ 32 & 65 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17-8-9 & 32-32 \\ 32-32 & 65-56-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $P(0,0)$, $Q(-2,0)$, $R(-1,-1)$. Qual è il centro? Quanto vale il raggio? Disegnare. Calcolare l'equazione della retta tangente alla circonferenza trovata nel punto $A(-1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

    Soluzione. La corda PQ ha per asse la retta $x = -1$; la corda PR ha per asse $x + y = -1$. I due assi si intersecano in $P_0(-1, 0)$ che è quindi il centro della circonferenza. Il raggio deve essere uguale alla distanza di P_0 da P: $r = 1$. L'equazione è allora $(x+1)^2 + y^2 = 1$ ossia $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

La curva è data in forma cartesiana implicita e possiamo calcolare la tangente in un suo punto con l'equazione

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 (y - y_0) = 0 \tag{1}$$

dove $f(x, y) = x^2+y^2+2x$ e $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0$ è la derivata di f rispetto a x calcolata in (x_0, y_0) e $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0$ è la derivata di f rispetto a y calcolata in (x_0, y_0).
Nel nostro caso otteniamo Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

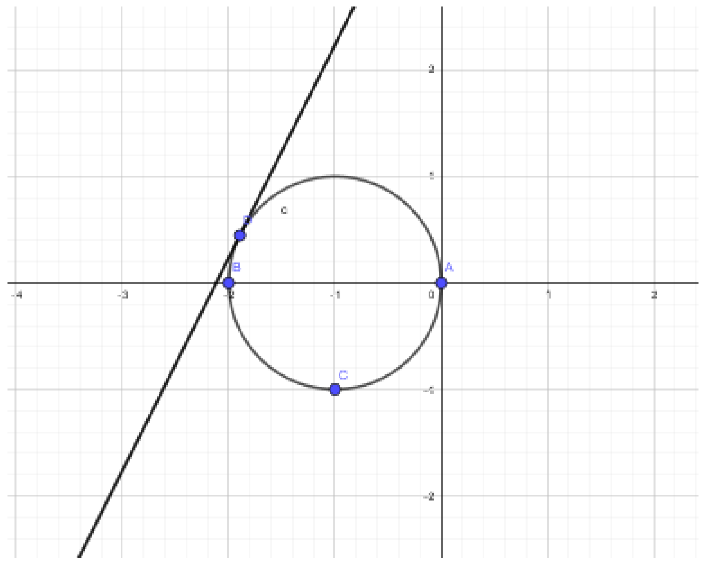
che calcolate nel punto A danno:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

e l'equazione della tangente diventa

$$\boxed{4x - 2y + 4 + 2\sqrt{5} = 0}$$



2
1
c
D
B
A
-4
-3
-2
-1
0
1
2
C
-1
-2