Prova scritta di Geometria - 12 febbraio 2019

Risolvere i seguenti 11 esercizi.

COGNOME: _________________________ NOME: _________________________

1. Scrivere il proprio Cognome e il proprio Nome, nell'ordine, in stampatello, negli spazi appositi qui sopra.

2. Determinare l'equazione della retta (retta di minima distanza) perpendicolare ed incidente le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

Soluzione. Punto mobile su r_1: $P_1(2t_1 - 1, t_1, t_1)$

Punto mobile su r_2: $P_2(2, -t_2 + 1, t_2)$

Vettore Mobile: $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3 - 2t_1 \\ -t_2 + 1 - t_1 \\ t_2 - t_1 \end{pmatrix}$ Deve aversi $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{r}_1 = 0$ e $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{r}_2 = 0$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 6 - 4t_1 + 1 - 2t_1 = 0 \\ 2t_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui $t_1 = \frac{7}{6}$ e $t_2 = \frac{1}{2}$ e quindi i punti

$$P_1(\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6}) \qquad P_2(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Infine la retta per questi due punti è la retta desiderata:

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{2} \\ y = z \end{cases}$$

3. Classificare, al variare del parametro h, la conica di equazione

$$4x^2 + 2y^2 + 2hxy + 2(h+2)x + 2(h+3)y + 2(h+2) = 0$$

Soluzione. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2k & k & k+1 \\ k & 4 & k-2 \\ k+1 & k-2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = -4-4k$, $\begin{vmatrix} 4 & k-2 \\ k-2 & 2 \end{vmatrix} = -k^2 + 4k + 4$. Abbiamo quindi che per $k \neq -1$ la conica è generale. Per $k = -1$ la conica è degenere. Per $2 - 2\sqrt{2} < k < 2 + 2\sqrt{2}$ abbiamo un'ellisse, per k fuori da questo intervallo abbiamo un'iperbole, e infine per $k = 2 \pm 2\sqrt{2}$ abbiamo una parabola. Nel caso $k = -1$ abbiamo un'iperbole degenere costituita da due rette incidenti.

4. Calcolare la proiezione ortogonale $\mathbf{p}$ del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sul piano di equazione $x + y + z = 0$.

Soluzione. La prima cosa da fare è trovare una base ortogonale (o ortonormale) del piano. Per esempio,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora sfruttiamo la formula (sviluppo di Fourier):

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2}\mathbf{u}_k$$

La formula qui si semplifica in quanto i denominatori sono tutti uguali a 1. Otteniamo

$$\mathbf{p} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2$$

e quindi

$$\mathbf{p} = (-2)\mathbf{u}_1 + -4(\sqrt{2/3})\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 7/3 \\ -5/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

5. Dimostrare che se A è una matrice di ordine $m \times n$ allora la matrice AA^T è simmetrica.

   Soluzione.
   $$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$
   siccome la trasposta di AA^T è uguale a AA^T essa è simmetrica.

6. Calcolare i coseni direttori della retta passante per i punti $A(1, -1, 1)$ e $B(2, 3, -4)$ e orientata nel verso delle y-decrescenti.

   Soluzione.

   I parametri direttori si ottengono facendo la differenza delle coordinate, pertanto essi sono proporzionali a
   $$\ell = -2 - 1 = -3, \quad m = 3 - 1 = 2, \quad n = 4 - 1 = 3$$
   I coseni direttori sono le componenti di un versore parallelo alla retta e quindi quelli della retta con l'orientazione desiderata sono
   $$\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{-3}{\sqrt{22}}$$

7. Sia $T : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2)$ definita da $T(A) = -A^T$. Determinare la matrice standard di T. Determinare la controimmagine di $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Soluzione. Fissiamo una base ordinata di $M(2 \times 2)$. Per esempio la base canonica: $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
   $$E_{11} \mapsto -E_{11} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$E_{12} \mapsto -E_{21} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$E_{21} \mapsto -E_{12} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

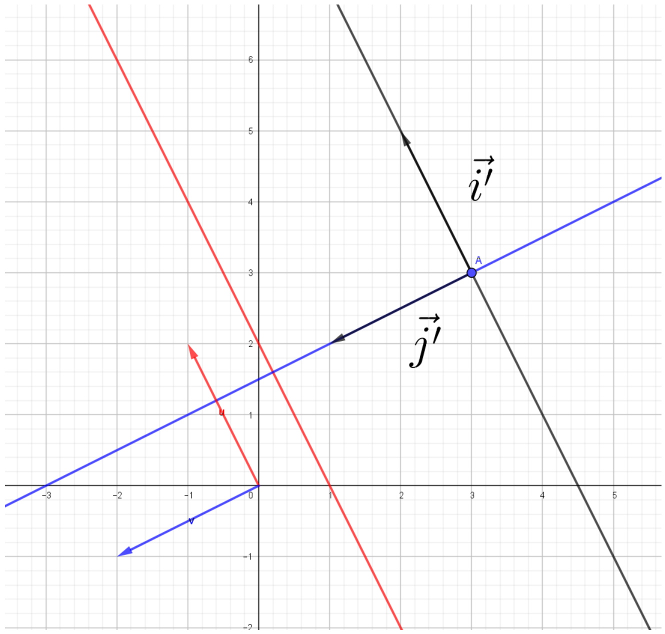
$$E_{22} \mapsto -E_{22} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In definitiva abbiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Nel sistema di riferimento $RC = RC(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ consideriamo la retta r di equazione $2x + y = 2$ orientata nel verso delle x decrescenti e sia $A(-1, -1)$ un punto del piano. Determinare un sistema di riferimento $RC' = RC(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$ equiverso a RC avente A come nuova origine O' e una retta parallela a r come nuovo asse x' e scrivere il cambiamento di coordinate di punto.

   Soluzione. Il versore di direzione che dobbiamo fissare è $\overrightarrow{i'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e dobbiamo prendere la retta parallela a r: $2x + y = k$ passante per A. Troviamo $6 + 3 = 9 = k$ da cui $2x + y = 9$ è l'equazione del nuovo asse x'. Come asse y' prendiamo la perpendicolare a r passante per A: $-x + 2y = 3$. Se il nuovo riferimento deve essere equiverso al vecchio dobbiamo prendere come versore $\overrightarrow{j'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.



I nuovi assi coordinati sono le rette di equazioni $-x+2y=3$ e $2x+y=9$. Le equazioni di cambiamento di punto si ottengono normalizzando queste equazioni e ponendo

$$\begin{cases} x' = \frac{-x+2y-3}{\sqrt{5}} \\ y' = \frac{2x+y-9}{\sqrt{5}} \end{cases} \tag{1}$$

Il cambiamento di coordinate è

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

e quello inverso è

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

9. Usare il Teorema di Cayley-Hamilton per calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico della matrice in questione è $x^2 - 2x - 9$. Per il Teorema di Cayley-Hamilton abbiamo

$$A^2 - 2A - 9I = 0$$

di conseguenza

$$A^2 - 2A = 9I$$

e infine

$$A(\frac{A - 2I}{9}) = I$$

Ne segue che $A^{-1} = \frac{A-2I}{9}$. Esplicitamente abbiamo

$$\frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Siano $z = 1 - 3i$ e $w = 3 + i$ due numeri complessi. Ridurre nella forma $a + ib$ il numero

$$\bar{w} - z^2 + \bar{z} - \frac{z}{w} - 2 + i$$

Scrivere il risultato in forma trigonometrica.

Soluzione.

$$3 - i - (1 - 3i)^2 + (1 + 3i) - \frac{1 - 3i}{3 + i} - 2 + i$$

$$3 - i - (1 - 9 - 6i) + (1 + 3i) + i - \frac{(1 - 3i)(3 - i)}{10} - 2 + i$$

$$10(1 + i)$$

La sua forma trigonometrica è $10(1 + i) = 10\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$