Norme per vettori e matrici [1]

Se abbiamo diversi vettori di $\mathbb{C}^n$ oppure diverse matrici in $M(n \times n)$, che cosa potrebbe significare dire che alcuni vettori o matrici sono “piccoli” mentre altri sono “grandi”? Sotto quali circostanze potremmo dire che due vettori sono “vicini” oppure “distanti”?

Questioni di “grandezza” o di “vicinanza” nello spazio reale di due o tre dimensioni di solito si riferiscono alla distanza euclidea. La lunghezza euclidea di un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ è $\sqrt{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} = \sqrt{\sum v_i^2}$, e si dice che $\mathbf{v}$ è “piccolo”, rispetto a questa misura, se questo numero non negativo è piccolo. Inoltre i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono “vicini” se la lunghezza della loro differenza $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un numero piccolo.

Che cosa si può dire della “grandezza” di matrici, che possono essere pensate come vettori di uno spazio di dimensione superiore? E cosa possiamo dire dei vettori in spazi di dimensione infinita? E dei vettori complessi? Ci sono dei modi utili per misurare la “grandezza” di vettori reali che non sia la lunghezza euclidea?

Un modo per rispondere a queste domande è di studiare la *norma*, ossia una misura di grandezza, di matrici e di vettori. La norma può essere pensata come una generalizzazione della lunghezza euclidea, ma lo studio di essa non è soltanto un esercizio di generalizzazione matematica. Essa è necessaria per una corretta formulazione di nozioni come serie di potenze di matrici, ed è essenziale nell’analisi e nella valutazione di algoritmi per il calcolo numerico. Inoltre, diversi tipi, tutti accettabili, di norma possono essere più o meno convenienti nelle varie situazioni, cosicché è opportuno studiare le proprietà comuni a tutte le norme, piuttosto che limitare l’attenzione ad un sola di esse.

I seguenti esempi indicano alcuni modi in cui nasce il bisogno di una norma.

Esempio 1. Se x è un numero complesso tale che $|x| < 1$, sappiamo che

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Questo suggerisce la formula

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \cdots$$

per calcolare l’inversa della matrice quadrata $I - A$, ma sotto quali ipotesi questa operazione è valida? Risulta che è sufficiente che una norma di matrice di A sia minore di 1, e qualunque norma va bene. Analogamente, si può mostrare che molte altre serie di potenze che possono essere usate per definire funzioni a valori matriciali, come per esempio

$$e^A \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

convergono e sono ben definite usando le norme. Le norme possono anche essere utili per determinare il numero di termini di una serie di potenze necessari per calcolare il valore di una data funzione per un certo grado di approssimazione.

[1] libera traduzione da Horn-Johnson “Matrix Analysis”, cap. 5

Esempio 2. Se f è una funzione di variabile reale a valori reali, sappiamo che se il valore di $f(x)$ è noto per $x = x_0$, allora il valore in punti vicini $x = x_0+h$ può essere stimato dalla derivata prima: il valore di $f(x_0)$ è stimato dal valore di $f(x_0 + h)$. Questo può accadere anche nel calcolo con matrici. Supponiamo di voler calcolare A^{-1} (o qualche altra funzione di A), ma i coefficienti di A sono ottenuti da esperimenti, oppure dall'analisi di altri dati, o da calcoli precedenti, e non sono conosciuti con esattezza. Possiamo pensare che A sia composta dal valore "vero" A_0 più un errore E, e vorremmo stimare il potenziale "errore relativo" (in termini della "grandezza" di E quando si calcoli $A^{-1} = (A_0+E)^{-1}$. invece della vera A_0^{-1}. Stime per la disparità tra A^{-1} e A_0^{-1} può essere tanto importante quanto il conoscere il valore esatto di A^{-1}, e la norma fornisce un modo sistematico per trattare queste questioni.

Esempio 3. Stime per importanti quantità associate ad una matrice, come gli autovalori, spesso utilizzano le norme, come pure le stime per possibili cambiamenti in queste quantità quando la matrice è perturbata.

Esercizio.

1. Sia $A = \begin{pmatrix} -6 & -10 & -6 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Verificare che la matrice A è nilpotente, cioè una sua potenza intera è nulla.

2. Verificare che la matrice $B = I - A$ è invertibile.

3. Verificare che la matrice inversa è $I + A + A^2$.

4. Calcolare e^A definito come $e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2$.

   Soluzione.

   (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $B = I - A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 6 \\ -3 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$. Il determinante $\det B = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(-21 + 18) = 1$ e quindi B è invertibile.

   (c) $I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -10 & -6 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -\frac{7}{3} & 2 \end{pmatrix}$.

   Verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -\frac{7}{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 10 & 6 \\ -3 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   come richiesto

(d) $I+A+\frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6 & -10 & -6\\ 3 & 5 & 3\\ 0 & -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ -\frac{3}{2} & -3 & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 0\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}-2 & -4 & -6\\ \frac{3}{2} & 3 & 3\\ -\frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & 2\end{pmatrix} = e^A.$