Simulazione della Prova scritta di Geometria - dicembre 2019

N.B. Il compito consisterà di 10 esercizi. In questa simulazione ci sono il doppio di esercizi.

COGNOME: ____________________ NOME: ____________________

Esercizio 0: Scrivere il proprio Cognome e il proprio Nome, nell'ordine, in stampatello, negli spazi appositi qui sopra.

1. Determinare l'equazione della retta (retta di minima distanza) perpendicolare ed incidente le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

2. Dire se la conica di equazione

$$4x^2 + 2y^2 + 2xy + 6x + 8y + 6 = 0$$

(a) è degenere o non degenere;

(b) è una ellisse, parabola o iperbole;

(c) se la conica ha un centro determinarne le coordinate.

3. Calcolare la proiezione ortogonale $\mathbf{p}$ del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sul piano di equazione $x - y + z = 0$.

4. Dimostrare che se A è una matrice di ordine $m \times n$ allora la matrice AA^T è simmetrica.

5. Calcolare il volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\mathbf{u} = (-1, -1, 1)^T$, $\mathbf{v} = (2, 3, -4)^T$ e $\mathbf{w} = (3, 0, 1)^T$.

6. Sia $T : M(2\times 2) \to M(2\times 2)$ definita da $T(A) = A - A^T$. Determinare la matrice standard di T.

7. Quali sono le coordinate omogenee del punto improprio della retta di equazione $4x + 7y = 8$?

8. Nel sistema di riferimento $RC = RC(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ consideriamo la retta r di equazione $2x + y = 2$ orientata nel verso delle x decrescenti.

   (a) Determinare un versore $\vec{r}$ della retta concorde con l'orientazione data;

   (b) Determinare l'equazione di una retta s passante per $A(-1, -1)$ e perpendicolare a r;

   (c) Scegliere il versore $\vec{s}$ di s in modo tale che la base $\mathcal{B} = \{\vec{r}, \vec{s}\}$ sia equiversa alla base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

9. Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Siano $z = 2 - 3i$ e $w = 3 - i$ due numeri complessi. Ridurre nella forma $a + ib$ il numero

$$\bar{w} - z^2 + \bar{z} - \frac{z}{w} - 2 + i$$

11. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^5$, si consideri il sottospazio U di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una base di U;

(b) Determinare delle equazioni per $U^\perp$.

12. Determinare l'equazione della retta per l'origine ed incidente le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = -2z + 1 \end{cases}$$

13. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

(a) Determinare i valori di k per cui la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Determinare i valori di k per cui la matrice AA^T è diagonalizzabile.

14. Dire se la seguente permutazione è di classe pari o dispari:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

15. Calcolare i coseni direttori della retta passante per i punti $A(1, 2, 1)$ e $B(-2, 3, 4)$ e orientata nel verso delle x-crescenti.

16. Dato il polinomio $(x-4)^2 \in \mathbb{P}_2$, scrivere le coordinate $\chi((x-4)^2)$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

17. Determinare gli asintoti dell'iperbole di equazione

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

18. Diagonalizzare ortogonalmente la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. (Determinare la matrice ortogonale diagonalizzante P).

19. Sapendo che A e B sono due matrici quadrate simmetriche di ordine n, spiegare perché la matrice $A + B$ è diagonalizzabile.

20. (a) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $P(1,1)$, $Q(2,4)$, $R(3,9)$.

    (b) Qual è il suo centro?

    (c) Quanto vale il suo raggio?