13. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

(a) Determinare i valori di k per cui la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Determinare i valori di k per cui la matrice AA^T è diagonalizzabile.

(a) Il pol caratteristico è

$$x^2 - 6x + (5-5k)$$ che ha radici

$$x = 3 - \sqrt{4+5k} \quad , \quad 3 + \sqrt{4+5k}$$

e sono distinte la matrice è certamente
iagonalizzabile. Nel caso in cui $\Delta = 0$, cioè
$4+5k=0$, $k = -\frac{4}{5}$), le radici sono coincidenti.
quel caso, il polinomio ha radice doppia $x=3$.
saminiamo allora la matrice $\lambda I - A = 3I - A =$

$$\begin{pmatrix} 3-5 & -5 \\ +\frac{4}{5} & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ \frac{4}{5} & 2 \end{pmatrix}$$ corrispondente alla eq.

$$2x+5y=0$$

unque la molteplicità geometrica è 1 mentre
ella algebrica è 2. La matrice non è diagonalizzabile.

Essendo AA^T simmetrica essa è sempre diagonalizzabile
per il Teorema degli assi principali.

14. Dire se la seguente permutazione è di classe pari o dispari:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4 : 3
5 : 3

6 inversioni
Classe pari

15. Calcolare i coseni direttori della retta passante per i punti $A(1,2,1)$ e $B(-2,3,4)$ e orientata nel verso delle x-crescenti.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

x-crescenti corrisponde a $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

e dunque $\frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sono i coseni

direttori $\frac{3}{\sqrt{19}}, -\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{-3}{\sqrt{19}}$

16. Dato il polinomio $(x-4)^2 \in \mathbb{P}_2$, scrivere le coordinate $\chi((x-4)^2)$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$\chi_{\mathcal{B}}\left((x-4)^2\right) = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

17. Determinare gli asintoti dell'iperbole di equazione

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 0$$

"Basta annullare la parte quadratica"

$$\frac{(x-1)}{3} - \frac{(y+3)}{4} = 0$$

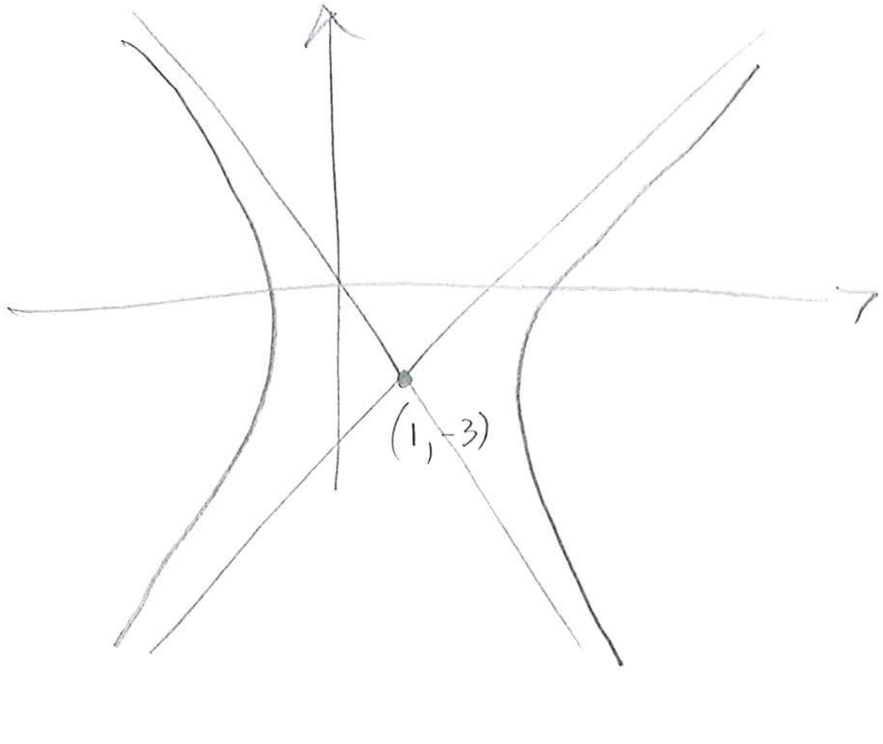
$$4(x-1) - 3(y+3) = 0$$

$$\boxed{4x - 3y - 13 = 0}$$

$$\frac{x-1}{3} + \frac{y+3}{4} = 0$$

$$4x - 4 + 3y + 9 = 0$$

$$\boxed{4x + 3y + 5 = 0}$$



18. Diagonalizzare ortogonalmente la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. (Determinare la matrice ortogonale diagonalizzante P).

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 5) = 0$$

Caso $\lambda = 0$: $\quad x + 2y = 0 \quad$ autovettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Caso $\lambda = 5$ $\quad 2x - y = 0 \quad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

19. Sapendo che A e B sono due matrici quadrate simmetriche di ordine n, spiegare perché la matrice $A + B$ è diagonalizzabile.

Se A e B sono simmetriche allora
$A+B$ è simmetrica e dunque
ort. diag per il Teorema degli
assi principali $\Rightarrow$ diagonalizzabile

$$(x+30)^2+(y-13)^2=1105$$

$$\boxed{x^2+y^2+60x-26y-36=0}$$

20. (a) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $P(1,1)$, $Q(2,4)$, $R(3,9)$.
(b) Qual è il suo centro?
(c) Quanto vale il suo raggio?

Asse PQ: $\left(\frac{1+2}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = M$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \frac{x-\frac{3}{2}}{3} = \frac{y-5/2}{-1}$$

$$\vec{PQ}^{\perp} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-x+\frac{3}{2} = 3y-\frac{15}{2} \qquad \boxed{x+3y=9}$$

$$-x-3y=-9$$

Asse QR: $M: \left(\frac{2+3}{2}, \frac{4+9}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right)$

$$\vec{QR} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{QR}^{\perp}: \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \frac{x-\frac{5}{2}}{5} = \frac{y-\frac{13}{2}}{-1}$$

$$-x+\frac{5}{2} = 5y-\frac{65}{2} \qquad -x-5y=-35 \qquad \boxed{x+5y=35}$$

$$\begin{cases} x+3y=9 \\ x+5y=35 \end{cases} \qquad 9-3y=35-5y \qquad 2y=26 \quad y=13 \qquad x=-30$$

Centro $(-30, 13) = C$

Raggio: $r = |\vec{CP}| = \sqrt{(1+30)^2+(1-13)^2} = \sqrt{31^2+12^2} =$

$$\sqrt{961+144} = \sqrt{1105}$$