Simulazione della Prova scritta di Geometria - dicembre 2019

N.B. Il compito consisterà di 10 esercizi. In questa simulazione ci sono il doppio di esercizi.

COGNOME: ____________________NOME: ____________________

Esercizio 0: Scrivere il proprio Cognome e il proprio Nome, nell'ordine, in stampatello, negli spazi appositi qui sopra.

1. Determinare l'equazione della retta (retta di minima distanza) perpendicolare ed incidente le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1(2t_1 - 1,\ t_1 + 1,\ t_1) \qquad P_2(2,\ -t_2 + 2,\ t_2)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2 - 2t_1 + 1 \\ -t_2 + 2 - t_1 - 1 \\ t_2 - t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2t_1 \\ -t_1 - t_2 + 1 \\ t_2 - t_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2(3 - 2t_1) - t_1 - \cancel{t_2} + 1 + \cancel{t_2} - t_1 = 0 \\ t_2 + \cancel{t_1} - 1 + t_2 - \cancel{t_1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 - 4t_1 - 2t_1 + 1 = 0 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 6t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 = \frac{7}{6} \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad P_1\left(\frac{14}{6} - 1,\ \frac{7}{6} + 1,\ \frac{7}{6}\right)$$

$$P_1\left(\frac{8}{6},\ \frac{13}{6},\ \frac{7}{6}\right)$$

$$P_2\left(2,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right) \qquad \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2 - 8/6 \\ 3/2 - 13/6 \\ 1/2 - 7/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/6 \\ -4/6 \\ -4/6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 3/2}{-1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1} \qquad \begin{cases} x - 2 = \frac{3}{2} - y \\ y - \frac{3}{2} = z - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x + y = \frac{7}{2} \\ y - z = 1 \end{cases}}$$

2. Dire se la conica di equazione

$$4x^2 + 2y^2 + 2xy + 6x + 8y + 6 = 0$$

(a) è degenere o non degenere;

(b) è una ellisse, parabola o iperbole;

(c) se la conica ha un centro determinarne le coordinate.

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= 6(8-1) - 3(6-4) + 4(3-16) = 42 - 6 + 4(-13) =$

$= 36 - 52 = -16 \neq 0$: le conica è non degenere.

b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 > 0$: è un'ellisse

c) Ha centro: $\left(\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}}, \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}} \right)$ $\quad \alpha_{01} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$\alpha_{02} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -13$

$\boxed{\left(\frac{-2}{7}, \frac{-13}{7} \right)}$ Centro

3. Calcolare la proiezione ortogonale $\mathbf{p}$ del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sul piano di equazione $x - y + z = 0$.

Una base del piano è, per esempio, $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{u}_2$

Applico G-S: $\underline{v}_1 = \underline{u}_1$

$$\underline{v}_2 = \underline{u}_2 - \frac{\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_1}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1} \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\underline{v}) = \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1} \underline{v}_1 + \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}_2}{\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2} \underline{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-1-\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1/2}{3/2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

4. Dimostrare che se A è una matrice di ordine $m \times n$ allora la matrice AA^T è simmetrica.

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

5. Calcolare il volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\mathbf{u} = (-1, -1, 1)^T$, $\mathbf{v} = (2, 3, -4)^T$ e $\mathbf{w} = (3, 0, 1)^T$.

Vol è il modulo di

$$\underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(4-3) + (-3+2) = 3-1 = 2$$

6. Sia $T : M(2\times 2) \to M(2\times 2)$ definita da $T(A) = A - A^T$. Determinare la matrice standard di T.

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Quali sono le coordinate omogenee del punto improprio della retta di equazione $4x + 7y = 8$?

Le coordinate omogenee del punto improprio sono $(0, l, m)$

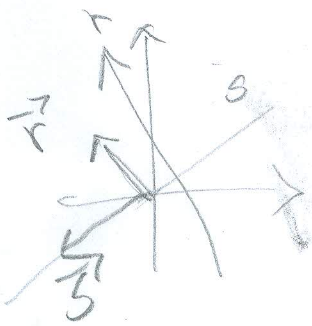
e dunque $(0, -7, 4)$.

8. Nel sistema di riferimento $RC = RC(O, \vec{i}, \vec{j})$ consideriamo la retta r di equazione $2x + y = 2$ orientata nel verso delle x decrescenti.

   (a) Determinare un versore $\vec{r}$ della retta concorde con l'orientazione data;

   (b) Determinare l'equazione di una retta s passante per $A(-1, -1)$ e perpendicolare a r;

   (c) Scegliere il versore $\vec{s}$ di s in modo tale che la base $\mathcal{B} = \{\vec{r}, \vec{s}\}$ sia equiversa alla base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.



$2x+y=2 \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\vec{r}$ (a)

$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}$ $\quad x+1=2(y+1)$

$\boxed{x-2y=1}$ (b)

c) $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}$

9. Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -2/9 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 1/3 & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{2}{9}+\frac{2}{9} \\ -1+1 & \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Siano $z = 2 - 3i$ e $w = 3 - i$ due numeri complessi. Ridurre nella forma $a + ib$ il numero

$$\bar{w} - z^2 + \bar{z} - \frac{z}{w} - 2 + i$$

$$3+i-(2-3i)^2+2+3i-\frac{(2-3i)}{3-i}-2+i$$

$$3+i-(4-12i+9i^2)+2+3i-\frac{(2-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}-2+i$$

$$3+i+5+12i+2+3i-\frac{6+2i-9i-3i^2}{9+1}-2+i$$

$$16i+10-\frac{9-7i}{10}-2+i$$

$$17i+8-\frac{9-7i}{10}=\frac{170i+80-9+7i}{10}$$

$$\frac{177i+71}{10}$$

11. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^5$, si consideri il sottospazio U di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una base di U;

(b) Determinare delle equazioni per $U^{\perp}$.

(a) $$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ & t_1 & & t_2 & t_3 \end{array} \end{array}$$ è già ridotta

$$\begin{cases} x_1 = -3t_1 + t_2 - 2t_3 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -t_2 - t_3 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} t_1 = 1, & 0 & 0 \\ t_2 = 0 & 1 & 0 \\ t_3 = 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

12. Determinare l'equazione della retta per l'origine ed incidente le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = -2z + 1 \end{cases}$$

$$\lambda_1 (x - 3z + 1) + \mu_1 (y - z) = 0$$

$$\lambda_2 (x - 3) + \mu_2 (y + 2z - 1) = 0$$

Passante per l'origine:

$$\lambda_1 = 0 \qquad -3\lambda_2 - \mu_2 = 0$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \mu_2 = -3$$

$$\boxed{y - z = 0}$$

$$x - 3 - 3(y + 2z - 1) = 0$$

$$x \cancel{-3} - 3y - 6z \cancel{+3} = 0$$

$$\boxed{x - 3y - 6z = 0}$$

Retta : $\begin{cases} x - 3y - 6z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$