Prova scritta di Geometria - 15 gennaio 2020

Svolgere in bella copia, motivando le risposte, i seguenti 10 esercizi.

COGNOME: ______________________ NOME: ______________________

Esercizio 0: Scrivere il proprio Cognome e il proprio Nome, nell'ordine, in stampatello, negli spazi appositi qui sopra.

1. Determinare l'equazione della retta (retta di minima distanza) perpendicolare ed incidente le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 3z - 2 \\ y = z + 3 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = -z + 1 \end{cases}$$

Soluzione. Punto mobile su r_1: $P_1(3t_1 - 2, t_1 + 3, t_1)$

Punto mobile su r_2: $P_2(3, -t_2 + 1, t_2)$

Vettore Mobile: $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 5 - 3t_1 \\ -t_2 - 2 - t_1 \\ t_2 - t_1 \end{pmatrix}$ Deve aversi $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{r}_1 = 0$ e $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{r}_2 = 0$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 3(5 - 3t_1) - t_2 - 2 - t_1 + t_2 - t_1 = 0 \\ t_2 + 2 + t_1 + t_2 - t_1 = 0 \end{cases}$$

da cui $t_1 = \frac{13}{11}$ e $t_2 = -1$ e quindi i punti

$$P_1(\frac{17}{11}, \frac{46}{11}, \frac{13}{11}) \qquad P_2(3, 2, -1)$$

Infine la retta per questi due punti è la retta desiderata:

$$\boxed{\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 3x + 2z = 7 \end{cases}}$$

2. Calcolare il volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\mathbf{u} = (3, 0, -2)^T$, $\mathbf{v} = (1, -2, 1)^T$ e $\mathbf{w} = (1, 4, 5)^T$.

   Soluzione.

   Il volume cercato è dato dal modulo del prodotto misto

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = |3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} | = | -54|$$

   Il volume è quindi 54.

3. Sia $T : M(2\times 2) \to M(2\times 2)$ definita da $T(A) = A + A^T$. Determinare la matrice standard di T.

   Soluzione. Fissiamo una base ordinata di $M(2 \times 2)$. Per esempio la base canonica: $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

$$E_{11} \mapsto 2E_{11} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} \mapsto E_{12} + E_{21} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} \mapsto E_{21} + E_{12} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{22} \mapsto 2E_{22} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   In definitiva abbiamo la matrice desiderata

$$M(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Quali sono le coordinate omogenee del punto improprio della retta di equazione $7y = 3x - 8$?

   Soluzione. Il punto improprio ha la forma $(0, \ell, m)$ dove ℓ, m sono i parametri direttori. Nella fattispecie abbiamo quindi

   $$(0, 7, 3), \text{ oppure } (0, -7, -3)$$

   o infinite altre terne proporzionali a queste.

5. Nel sistema di riferimento $RC = RC(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ consideriamo la retta r di equazione $x - 3y = 1$ orientata nel verso delle y decrescenti.

   (a) Determinare un versore $\vec{r}$ della retta concorde con l'orientazione data;

   (b) Determinare l'equazione di una retta s passante per $A(-1, -1)$ e perpendicolare a r;

   (c) Scegliere il versore $\vec{s}$ di s in modo tale che la base ordinata $\mathcal{B} = \{\vec{r}, \vec{s}\}$ sia contraversa alla base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Soluzione.

(a) Il versore di direzione che dobbiamo fissare è $\overrightarrow{r} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

(b) La retta s perpendicolare a r e passante per A ha equazione

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-3}$$

da cui

$$\boxed{3x + y + 4 = 0}$$

(c) Dobbiamo scegliere un versore di s. Essi sono $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$. Per ottenere una base equiversa dobbiamo scegliere il secondo versore in modo che la matrice risultante abbia determinante negativo:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3 & 1\\-1 & -3\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3 & -1\\-1 & 3\end{pmatrix}$$

La scelta giusta è evidentemente la seconda:

$$\boxed{\overrightarrow{r} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{s} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}}$$

6. Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, usando il Teorema di Cayley-Hamilton.

Soluzione. Usiamo il Teorema di Cayley-Hamilton.

Il polinomio caratteristico della matrice in questione è $x^2 - 4x + 9$. Per il Teorema di Cayley-Hamilton abbiamo

$$A^2 - 4A + 9I = 0$$

di conseguenza

$$A^2 - 4A = -9I$$

e infine

$$A(\frac{-A + 4I}{9}) = I$$

Ne segue che $A^{-1} = \frac{A-4I}{-9}$. Esplicitamente abbiamo

$$\frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Determinare l'equazione della retta per l'origine ed incidente le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 3z - 2 \\ y = z + 3 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = -z + 1 \end{cases}$$

Soluzione. La retta deve appartenere ad un piano del fascio

$$\lambda(x - 3z + 2) + \mu(y - z - 3) = 0$$

ma anche al fascio

$$\lambda'(x - 3) + \mu'(y + z - 1) = 0$$

Imponendo che i piani passino per l'origine si ha

$$2\lambda - 3\mu = 0, \quad -3\lambda' - \mu' = 0$$

da cui

$$\lambda = 3, \mu = 2, \quad \lambda' = 1, \mu' = -3$$

Otteniamo di conseguenza la retta di equazioni

$$\boxed{\begin{cases} 3x + 2y - 11z = 0 \\ x - 3y - 3z = 0 \end{cases}}$$

8. Determinare gli asintoti dell'iperbole di equazione

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Soluzione. "Basta annullare la parte quadratica":

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 0$$

Questa è una differenza di quadrati e quindi dà luogo alle due equazioni

$$\frac{(x+2)}{4} - \frac{(y-1)}{3} = 0$$

e

$$\frac{(x+2)}{4} + \frac{(y-1)}{3} = 0$$

ossia, semplificando:

$$\boxed{3x - 4y + 10 = 0, \qquad 3x + 4y + 2 = 0}$$

9. Diagonalizzare ortogonalmente la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$. (Determinare la matrice ortogonale diagonalizzante P).

   Soluzione. La matrice è simmetrica e quindi diagonalizzabile ortogonalmente. L'equazione caratteristica è

   $$\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$$

   e quindi gli autovalori sono 11 e 1. L'autospazio relativo a $\lambda = 11$ si trova studiando il SLO di matrice

   $$\begin{pmatrix} 11-2 & -3 \\ -3 & 11-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

   abbiamo quindi l'equazione $-3x+y=0$. L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ è ortogonale a questo e quindi ha equazione $x+3y=0$. Gli autovettori sono quindi, rispettivamente

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Normalizzando questi vettori otteniamo la matrice ortogonale diagonalizzante

   $$\boxed{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

10. Se A è una matrice di ordine n ortogonalmente diagonalizzabile spiegare se anche A^2 è ortogonalmente diagonalizzabile.

    Soluzione. Se A è una matrice di ordine n ortogonalmente diagonalizzabile, per il teorema degli assi principali essa è simmetrica, quindi anche A^2 è simmetrica e dunque è anch'essa ortogonalmente diagonalizzabile.