Esercizio 1.
Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 10 & 12 \\ 5 & 0 & 9 & 8 & 11 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Calcolare

1. il rango per pivot
2. il rango per minori
3. trovare una base per lo spazio delle colonne
4. trovare una base per lo spazio delle righe

Soluzione.

1. La forma ridotta (di Gauss-Jordan) della matrice in questione è

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/5 & 8/5 & 11/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 6/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   da cui vediamo che il rango per pivot è 2.

2. Il teorema del rango ci dice che anche il rango per minori sarà 2. Verifichiamo.

   Osserviamo subito che il minore principale $M(1,2|1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero e quindi sappiamo che il rango è almeno 2.

   Dovremmo ora verificare che tutti i minori di ordine 3,4,5 sono anch'essi nulli per la verifica richiesta. Si può verificare che ci sono $\binom{5}{3}\binom{5}{3} = 100$ minori di ordine 3, $\binom{5}{4}\binom{5}{4} = 25$ minori di ordine 4,, $\binom{5}{5}\binom{5}{5} = 1$ minori di ordine 5. In teoria 126 determinanti da calcolare!

   Sfruttando il Teorema degli orlati possiamo limitarci a prendere solo i 9 minori 3×3 che orlano il minore $M(1,2|1,2)$.

   Essi sono

$$M(1,2,3|1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 9 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   che ha determinante 0.

$$M(1,2,4|1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha determinante 0.

$$M(1,2,5|1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

che ha determinante 0.

$$M(1,2,3|1,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 5 & 0 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante 0.

$$M(1,2,4|1,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 5 & 0 & 8 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante 0.

$$M(1,2,5|1,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

che ha determinante 0.

$$M(1,2,3|1,2,5) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 12 \\ 5 & 0 & 11 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante 0.

$$M(1,2,4|1,2,5) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 12 \\ 5 & 0 & 11 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante 0.

$$M(1,2,5|1,2,5) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 12 \\ 5 & 0 & 11 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

che ha determinante 0.

Essendo tutti nulli i minori di ordine $2+1$ e avendo trovato un minore di ordine 2 non nullo abbiamo, per il Teorema degli orlati, verificato che il rango per minore è, come anticipato, 2.

3. Per trovare una base dello spazio delle colonne consideriamo la forma ridotta per righe

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/5 & 8/5 & 11/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 6/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Osserviamo che la terza colonna è combinazione lineare delle prime due:

$$\begin{pmatrix} 9/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 9/5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3/5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   e di conseguenza tale relazione vale anche per le corrispondenti colonne della matrice A, come si può verificare:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 9/5 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3/5 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Analogamente per la quarta e quinta colonna. Ne concludiamo che la prima e la seconda colonna di A costituiscono la base desiderata di $\mathcal{C}$, da cui deduciamo, come ci aspettavamo, che il rango per colonne della matrice A è 2.

4. Per quanto riguarda le righe: si può dimostrare (vedi dimostrazione facoltativa del testo) che $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(R)$ (attenzione! In generale invece $\mathcal{R}(A) \neq \mathcal{R}(R)$) e quindi le prime due righe della forma ridotta costituiscono chiaramente una base di $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(R)$.