Esercizio 10. In un sistema di riferimento $RC(Oxy)$, scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1,2)$, $B(3,2)$, $D(-2,5)$. Trovare centro e raggio. Disegnare.

Soluzione.

Soluzione algebrica

Sappiamo che una circonferenza ha necessariamente una equazione della forma $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Imponendo il passaggio per i tre punti otteniamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 1^2+2^2+a+2b+c=0 \\ 3^2+2^2+3a+2b+c=0 \\ (-2)^2+5^2-2a+5b+c=0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} a+2b+c=-5 \\ 3a+2b+c=-13 \\ -2a+5b+c=-29 \end{cases}$$

Osserviamo che questo sistema ha matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa ha determinante diverso da zero se e solo se i tre punti non sono allineati. In questo caso la soluzione quindi esiste ed è unica. Sappiamo infatti che tre punti non allineati individuano un'unica circonferenza.

Risolvendo il sistema per esempio col metodo di Cramer o mediante la riduzione di Gauss otteniamo

$$a=-4, b=-12, c=23$$

La circonferenza cercata ha dunque equazione

$$\boxed{x^2+y^2-4x-12y=23}$$

Possiamo ora "completare i quadrati" come segue

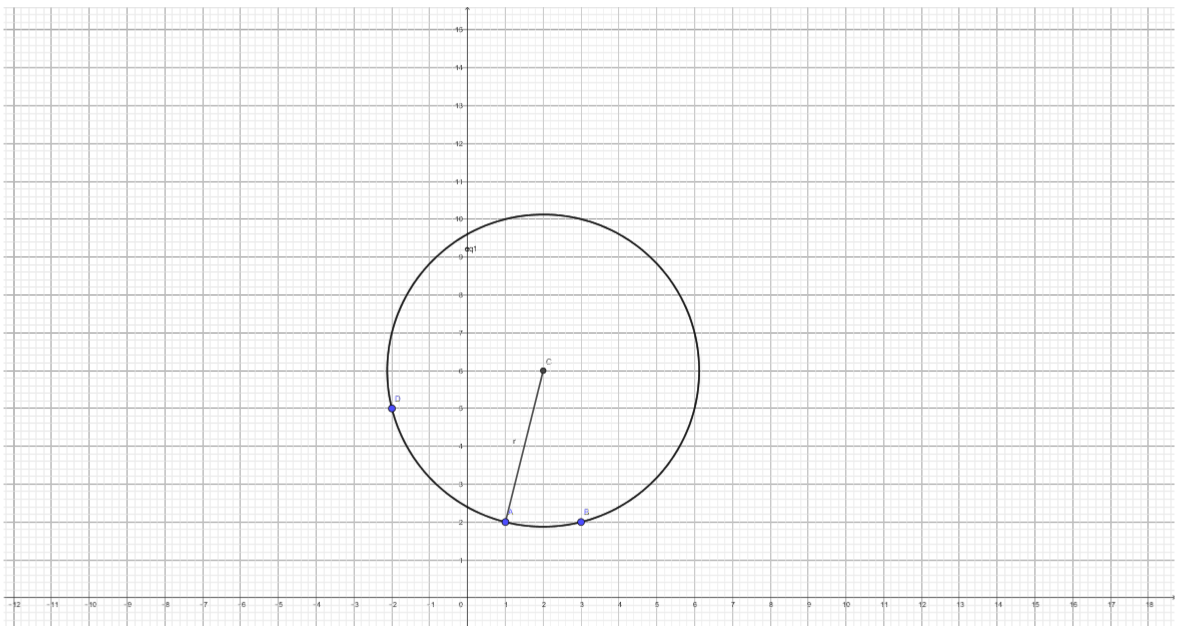
$$(x^4-4x+4)+(y^2-12y+36)=-23+4+36$$

da cui

$$(x-2)^2+(y-6)^2=17$$

da cui leggiamo che il centro della circonferenza è $C(2,6)$ e il raggio è $\sqrt{17}$.

(v. figura)



Soluzione geometrica

Asse del segmento $\overline{AD}$: $-x+y=4$

Asse del segmento $\overline{AB}$: $x=2$.

Il centro della circonferenza è l'intersezione dei due assi:

$$\begin{cases} -x+y=4 \\ x=2 \end{cases}$$

da cui ricaviamo le coordinate del centro $C(2,6)$.

Il raggio si ricava dalla distanza $d(C,A)=\sqrt{(1-2)^2+(2-6)^4}=\sqrt{17}$.

Possiamo così scrivere l'equazione

$$(x-2)^2+(y-6)^2=17$$

ovvero, svolgendo i calcoli

$$\boxed{x^2+y^2-4x-12y=23}$$