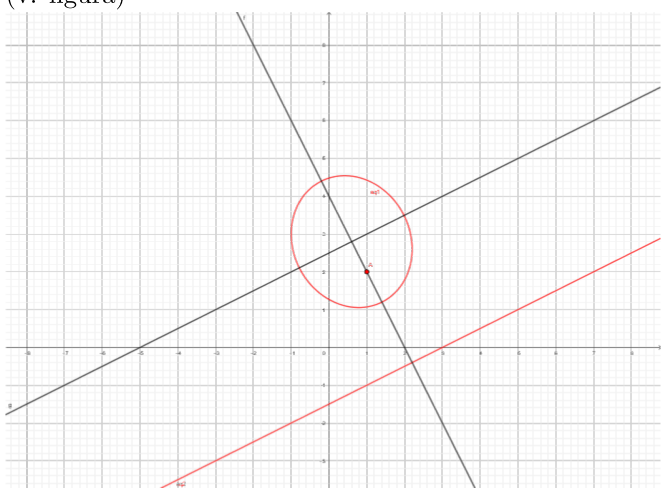
Esercizio 11. In un riferimento $RC(Oxy)$, consideriamo l'ellisse ottenuta in un precedente esercizio di equazione

$$19x^2 + 16y^2 + 4xy - 34x - 92y + 91 = 0$$

(v. figura)



Scrivere l'equazione della stessa curva nel riferimento $RC(O'XY)$ dove $O'(\frac{3}{5}, \frac{14}{5})$ e il cambiamento ha equazioni

$$\begin{cases} x = \frac{2X+Y}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} \\ y = \frac{X-2Y}{\sqrt{5}} + \frac{14}{5} \end{cases}$$

Soluzione.

Sostituendo nell'equazione dell'ellisse abbiamo

$$19(\frac{2X+Y}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5})^2 + 16(\frac{X-2Y}{\sqrt{5}} + \frac{14}{5})^2 + 4(\frac{2X+Y}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5})(\frac{X-2Y}{\sqrt{5}} + \frac{14}{5})$$

$$-34(\frac{2X+Y}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5}) - 92(\frac{X-2Y}{\sqrt{5}} + \frac{14}{5}) + 91 = 0$$

$$\frac{76X^2}{5} + \cancel{\frac{76XY}{5}} + \frac{228X}{5\sqrt{5}} + \frac{19Y^2}{5} + \frac{114Y}{5\sqrt{5}} + \frac{171}{25} +$$

$$\frac{16X^2}{5} - \cancel{\frac{64XY}{5}} + \frac{448X}{5\sqrt{5}} + \frac{64Y^2}{5} - \frac{896Y}{5\sqrt{5}} + \frac{3136}{25} +$$

$$\frac{8X^2}{5} - \cancel{\frac{12XY}{5}} + \frac{124X}{5\sqrt{5}} - \frac{8Y^2}{5} + \frac{32Y}{5\sqrt{5}} + \frac{168}{25}$$

$$-\frac{68X}{\sqrt{5}} - \frac{34Y}{\sqrt{5}} - \frac{102}{5}$$

$$-\frac{92X}{\sqrt{5}} + \frac{184Y}{\sqrt{5}} - \frac{1288}{5} + 91 = 0$$

Semplifichiamo osservando che

$$\frac{76XY}{5} - \frac{64XY}{5} - \frac{12XY}{5} = 0$$

$$\frac{76X^2}{5} + \frac{16X^2}{5} + \frac{8X^2}{5} = \frac{100X^2}{5} = 20X^2$$

$$\frac{19Y^2}{5} + \frac{64Y^2}{5} - \frac{8Y^2}{5} = \frac{75Y^2}{5} = 15Y^2$$

$$\frac{228X}{5\sqrt{5}} + \frac{448X}{5\sqrt{5}} + \frac{124X}{5\sqrt{5}} - \frac{68X}{\sqrt{5}} - \frac{92X}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\frac{114Y}{5\sqrt{5}} - \frac{896Y}{5\sqrt{5}} + \frac{32Y}{5\sqrt{5}} - \frac{34Y}{\sqrt{5}} + \frac{184Y}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\frac{171}{25} + \frac{3136}{25} + \frac{168}{25} - \frac{102}{5} - \frac{1288}{5} + 91 = -48$$

ottenendo

$$20X^2 + 15Y^2 = 48$$

o anche

$$\boxed{\frac{X^2}{48/20} + \frac{Y^2}{48/15} = 1}$$

Quest'ultima si dice **equazione canonica** dell'ellisse in questione.

Questa forma più semplice dell'equazione ci permette di studiare la forma della curva.

Per esempio risolvendo rispetto alla Y:

$$Y = \pm\sqrt{\frac{48}{15}\left(1 - \frac{X^2}{48/20}\right)}$$

da cui vediamo che la X varia in un intervallo limitato e, per simmetria, che anche la Y varia in un intervallo limitato. Si tratta dunque di una curva limitata. Altre caratteristiche della curva sono esaminate nella teoria generale.

(v. figura)