Esercizio 13. In un riferimento $RC(Oxy)$, consideriamo la conica di equazione

$$x^2 + xy - 2y^2 + 4x - y + 3 = 0$$

Classificare questa conica, e disegnarla.

Soluzione.

La matrice della conica è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante per vedere se la conica è generale o degenere. Sfruttiamo alcune proprietà dei determinanti per ottenere

$$\begin{aligned} \det A &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -\frac{25}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{15}{2} \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & -\frac{25}{2} \\ 3 & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{75}{2} + \frac{75}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di una conica degenere (il polinomio a primo membro è riducibile).

Essendo inoltre

$$\alpha_{00} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} < 0$$

abbiamo un'iperbole degenere. Per trovare il centro utilizziamo la formula

$$\left(\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}}, \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}} \right)$$

$$\alpha_{01} = - \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = \frac{15}{4}$$

$$\alpha_{02} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

Il centro dunque ha coordinate $\left(-\frac{15}{9}, -\frac{2}{3}\right)$.

Per ottenere le rette componenti dell'iperbole degenere risolviamo

$$\ell^2 + \ell m - 2m^2 = 0$$

Poiché i parametri direttori sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, possiamo prendere $m = 1$ e risolvere la seguente equazione

$$\ell^2 + \ell - 2 = 0$$

da cui $\ell = -2, 1$. Le rette sono quindi

$$\frac{x+15/9}{-2} = \frac{y+2/3}{1}$$

ossia

$$\boxed{x+2y+3=0}$$

e l'altra

$$\frac{x+15/9}{1} = \frac{y+2/3}{1}$$

ossia

$$\boxed{x-y+1=0}$$

V. figura