Esercizio 14. In un riferimento $RC(Oxy)$, consideriamo la conica di equazione

$$(x+3y)^2 + 2x - 4y + 5 = 0$$

Classificare questa conica, e disegnarla.

Soluzione.

Essendo la parte quadratica un quadrato di un binomio abbiamo una parabola. Si può verificare infatti che nella matrice della conica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante per vedere se la conica è generale o degenere. Tale determinante vale -25. Si tratta quindi di una conica generale.

Essendo inoltre

$$\alpha_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

abbiamo una parabola generale. La parabola non ha centro ma ha asse di simmetria che si trova utilizzando l'equazione $u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 6y + 2, \frac{\partial f}{\partial y} = 6x + 18y - 4$$

da cui

$$2x + 6y + 2 + 3(6x + 18y - 4) = 0$$

ossia

$$\boxed{2x + 6y - 1 = 0}$$

Come nuovo sistema di riferimento utilizzeremo l'asse di simmetria, il vertice della parabola e la perpendicolare all'asse di simmetria passante per il vertice. Abbiamo che il vertice si calcola come intersezione dell'asse con la parabola stessa:

$$\begin{cases} (x+3y)^2 + 2x - 4y + 5 = 0 \\ 2x + 6y - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui $V(-\frac{11}{8}, \frac{5}{8})$. La perpendicolare invece ha equazione $6x - 2y = \frac{19}{2}$. Otteniamo allora il cambiamento

$$\begin{cases} X = \frac{2x+6y-1}{\sqrt{40}} \\ Y = \frac{6x-2y-\frac{19}{2}}{\sqrt{40}} \end{cases}$$

e quello inverso

$$\begin{cases} x = \frac{2X+6Y}{\sqrt{40}} - \frac{11}{8} \\ y = \frac{6X-2Y}{\sqrt{40}} + \frac{5}{8} \end{cases}$$

Sostituendo e semplificando si ottiene

$$10X^2 + \sqrt{10}Y = 0$$

ossia

$$\boxed{Y = -\sqrt{10}X^2}$$

V. figura (la figura rossa è la parabola assegnata, quella in nero rappresenta quella in posizione canonica)