Esercizio 15. Date le rette

$$r : \begin{cases} kx + y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - kz + 1 = 0 \\ 2x - y + z + k = 0 \end{cases}$$

Determinare i valori di k affinché le rette assegnate siano complanari. In quei casi decidere se le rette sono parallele o incidenti e trovare l'eventuale punto di intersezione.

Soluzione. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -k & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -k \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A, dapprima usando due operazioni elementari per semplificare:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -k & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -k & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ k & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -k & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1-k & k^2 & 2+k \\ 0 & -3 & 1+2k & 2-k \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1-k & k^2 & 2+k \\ -3 & 1+2k & 2-k \end{vmatrix}$$

e poi sviluppando quest'ultimo determinante con Laplace lungo la prima riga:

$$\begin{vmatrix} 1-k & k+1 \\ -3 & 2-k \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1-k & k^2 \\ -3 & 2k+1 \end{vmatrix}$$

$$(2-k)(1-k_{+}3(k+2) - 3[(1-k)(2k+1) + 3k^2] = -2k^2 - 3k + 5$$

Questo determinante si annulla per $k = 1$ e $k = -\frac{5}{2}$. Ciò significa che per valori diversi da questi le rette sono sghembe.

Consideriamo separatamente i due casi rimanenti.

Caso $k = 1$. La matrice è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha forma ridotta di Gauss-Jordan

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui vediamo che le rette sono incidenti e il punto di intersezione è $P_1(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 3)$.

Caso $k = 1$. La matrice è

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

che ha forma ridotta di Gauss-Jordan

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui vediamo che le rette sono di nuovo incidenti e il punto di intersezione è $P_2(-3, -\frac{11}{2}, 3)$.