Esercizio 16. Scrivere l'equazione cartesiana della sfera passante per i punti $A(1, 1, 1)$, $B(0, 0, 0)$, $C(1, -1, 2)$, $D(0, 1, -1)$. Determinare centro e raggio. Scrivere l'equazione dei piani tangenti alla sfera nei punti A e B.

Soluzione. La sfera ha equazione del tipo $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d = 0$. Imponendo il passaggio per A, B, C, D abbiamo il sistema

$$\begin{cases} a+b+c+d = -3 \\ d = 0 \\ a-b+2c+d = -6 \\ b-c+d = -2 \end{cases}$$

di matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La quale ha forma a gradini ridotta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione desiderata è quindi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 15x + 5y + 7y = 0 \tag{1}$$

che ha evidentemente centro $P(\frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$. Il raggio è la distanza

$$\overline{BP} = \sqrt{(\frac{15}{2})^2 + (-\frac{5}{2})^2 + (-\frac{7}{2})^2} = \frac{\sqrt{299}}{2}$$

Per calcolare l'equazione del piano tangente, calcoliamo prima il raggio vettore

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{15}{2} \\ 1 + \frac{5}{2} \\ 1 = \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

l'equazione del piano cercato ha questi come parametri di giacitura e deve passare per A. Dunque l'equazione è

$$-\frac{13}{2}(x-1) + \frac{7}{2}(y-1) + \frac{9}{2}(z-1) = 0$$

ossia

$$\boxed{13x - 7y - 9z + 3 = 0}$$

Analogamente, il piano tangente per il punto B ha parametri di giacitura uguali alle componenti di

$$\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

quindi

$$-\frac{15}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}z = 0$$

ossia

$$\boxed{-15x + 5y + 7z = 0}$$

Osserviamo che se la sfera passa per l'origine l'equazione del piano tangente per l'origine alla sfera si ottiene annullando i termini di primo grado nell'equazione (1) della sfera stessa.