Esercizio 17. Determinare la (minima) distanza tra le due rette sghembe

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Prendiamo due punti arbitrari di cui uno su r e uno su s. Per esempio $P_1(0, 0, 1)$ e $P_1'(1, 0, -1$. Dunque $\overrightarrow{P_1P_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La direzione perpendicolare a entrambe le rette è quella di

$$\vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

La distanza cercata è il modulo della proiezione di $\overrightarrow{P_1P_1'}$ su $\vec{r} \wedge \vec{s}$ e dunque

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{|\vec{r} \wedge \vec{s}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 +}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Esercizio 18. Calcolare la retta di minima distanza tra le due rette dell'esercizio precedente ossia, il che è equivalente, calcolare la retta perpendicolare e incidente entrambe le rette r e s.

Soluzione. Scriviamo le equazioni parametriche delle due rette:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - -t' \\ y = 0 \\ z = t' \end{cases}$$

Allora il vettore "mobile" è

$$\overrightarrow{P_1P_1'} = \begin{pmatrix} -t' - t \\ 0 - t \\ t' - 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo trovare per quali valori dei parametri questo vettore è perpendicolare sia a r che a s. Imponiamo le condizioni

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \vec{r} = 0 \\ \overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} (-t' - t) + (-t) = 0 \\ (-t' - t)(-1) + (t' - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -t' - 2t = 0 \\ 2t' + t - 1 = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} t' = \frac{2}{3} \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Otteniamo così i due punti $P_1'(-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$ e $P_1(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$. La distanza tra questi due punti è

$$\overline{P_1P_1'} = \sqrt{(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3} - 1)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

che conferma il risultato dell'esercizio precedente. Ora la retta cercata è la retta individuata da questi due punti e dunque ha equazioni

$$\frac{x + \frac{1}{3}}{-1/3} = \frac{y + \frac{1}{3}}{1/3} = \frac{z - 1}{-1/3}$$

o anche, più semplicemente,

$$\boxed{\frac{x + \frac{1}{3}}{-1} = \frac{y + \frac{1}{3}}{1} = \frac{z - 1}{-1}}$$

che è la retta desiderata perpendicolare e incidente a entrambe le rette r e s. Questa, volendo, può anche essere riscritta come

$$\boxed{\begin{cases} 3x - 3z = -4 \\ 3y + 3z = 2 \end{cases}}$$