Esercizio 2.
Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcolare autovalori, autovettori e stabilire se è diagonalizzabile ed eventualmente determinare la matrice diagonalizzante e la forma diagonale.

Soluzione. Considero il sistema $AX = \lambda X$ e voglio determinare se questo SLO ammette autosoluzione o meno.

Il sistema $AX = \lambda X$ nel nostro esempio è
$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e cioè il sistema
$$(\lambda I - A)X = 0$$

dove
$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 & -5 \\ -3 & \lambda - 2 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

è la matrice dei coefficienti. Stiamo cercando per quali valori di λ questo SLO ammette autosoluzioni (cioè soluzioni non banali). Sappiamo che la condizione necessaria e sufficiente perché questo avvenga è che la matrice dei coefficienti del SLO sia non invertibile. Ciò si traduce in
$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Nel nostro caso abbiamo
$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 & -5 \\ -3 & \lambda - 2 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = 0$$

che si traduce in
$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0.$$

Il polinomio $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6$ si chiama **polinomio caratteristico** di A e l'equazione
$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$$

si dice **equazione caratteristica** (di A).

Per risolvere questa equazione, supponendo che abbia soluzioni intere, cerchiamo prima una possibile soluzione tra i divisori di 6 (il termine noto). Questi sono: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Ovviamente cominciamo da ± 1.

Sostituendo $\lambda = 1$ abbiamo $1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$, e quindi 1 non è una soluzione. Proviamo $\lambda = -1 : -1 - 4 - 1 + 6 = 0$. Abbiamo quindi trovato una soluzione. Procediamo, col teorema di Ruffini, a dividere il polinomio $\lambda^3 - 4\lambda^2 + a + 6$ per $\lambda - (-1)$: otteniamo

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

Infine risolviamo l'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

che ha soluzioni $\lambda = 3, 2$.

Abbiamo così determinato tre autovalori della nostra matrice, ossia tre costanti per le quali è possibile ottenere autosoluzioni nel SLO $AX = \lambda X$.

Se ora vogliamo determinare gli autovettori devo risolvere i corrispondenti sistemi.

Caso $\lambda = -1$.

Il SLO ha matrice

$$\begin{pmatrix} -1+2 & 1 & -5 \\ -3 & -1-2 & 3 \\ 1 & 1 & -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ovviamente non ha rango 3 e altrettanto ovviamente ha rango 2.

Riduco a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono due pivot e come parametro possiamo prendere $y = t$

Il SLO corrispondente è

$$\begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Dunque troviamo infiniti autovettori tutti multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Caso $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 2+2 & 1 & -5 \\ -3 & 2-2 & 3 \\ 1 & 1 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Riduco a gradini

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono due pivot e il SLO è

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Dunque troviamo infiniti autovettori tutti multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Caso $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 & -5 \\ -3 & \lambda-2 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 1 & -5 \\ -3 & 3-2 & 3 \\ 1 & 1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ridotta dà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il SLO è

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

e le autosoluzioni (autovettori) sono tutti i multipli non nulli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Possiamo allora scrivere la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha per colonne gli autovettori trovati. Questa matrice risulta invertibile e la sua inversa è

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si può verificare che

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice A è invertibile.

Osservazione: Che cosa succederebbe se prendessimo le colonne in ordine diverso. Per esempio se prendessimo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avremmo allora

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice diagonale è cambiata ma è comunque diagonale.