Esercizio 20. Siano U e V due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1+x_3 = x_2+x_4 = 0\} \qquad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1+x_2 = x_3+x_4 = 0\}$$

Stabilire se i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, -2)$ appartengono a $U + V$.
Soluzione. Troviamo una base di U risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

che ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di rango due. I parametri sono le incognite x_3 e x_4. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x_1 = -s \\ x_2 = -t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

Una base di soluzioni è perciò data da $\{-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$.

Analogamente procediamo per l'altro sottospazio:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

che ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

di rango due. I parametri sono le incognite x_2 e x_4. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x_1 = -s \\ x_2 = s \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{cases}$$

Una base di soluzioni è perciò data da $\{1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$.

Vogliamo ora trovare le equazioni cartesiane di $U+V$. A tal fine consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e, in conclusione,

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è 3. L'equazione dello spazio somma è pertanto ottenuta imponendo

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 3$$

il che equivale a porre

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} - \left(x_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right) = 0$$

ossia

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0}$$

Vediamo quindi che $(1, 3, 1, 0)$ non soddisfa questa equazione e quindi non appartiene allo spazio somma, mentre il vettore $(1, 0, 1, -2)$ la soddisfa e dunque appartiene allo spazio somma.