Esercizio 21. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da $L(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

1. Verificare che L è lineare;
2. Determinare il nucleo di L;
3. Determinare l'immagine di L.

Soluzione.

1. Preliminarmente osserviamo che $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ sono due spazi vettoriali e quindi ha senso porsi la domanda.

   Prima verifica: $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{u})$

   Infatti, posto $\mathbf{u} = (x, y, z)$ e $\mathbf{v} = (x', y', z')$ il primo membro dà:

   $$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(x + x', y + y', z + z') = (x + x' + y + y', y + y' + z + z')$$

   mentre il secondo membro è

   $$L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{u}) = (x+y, y+z) + (x'+y', y'+z') = (x+y+x'+y', y+z+y'+z')$$

   i due risultati sono uguali, dunque la prima condizione è verificata.

   Seconda verifica: $L(k\mathbf{u}) = kL(\mathbf{u})$.

   Il primo membro è

   $$L(kx, ky, kz) = (kx + ky, ky + kz)$$

   Il secondo membro è

   $$kL(x, y, z) = k(x + y, y + z) = (k(x + y), k(y + z))$$

   Essendo i due risultati uguali, anche la seconda condizione è verificata. Pertanto L è lineare.

2. Ricordiamo che $\ker L = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 | L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$. Ricordando la definizione di L abbiamo $\ker L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = y + z = 0\}$. In definitiva, si tratta di risolvere un SLO:

   $$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

   Si tratta di una retta passante per l'origine di equazioni parametriche

   $$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

   e parametri direttori $\ell = 1, m = -1, n = 1$. (Detto in altra maniera il nucleo è lo spazio generato dal vettore $(1, -1, 1)$) ed ha dimensione 1.

3. Per determinare l'immagine, dobbiamo trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ che si possono ottenere come trasformazione di qualche terna di numeri secondo L. Ciò significa, determinare le coppie (a, b) per cui il sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \end{cases}$$

ammette soluzioni. Per il teorema di Rouché-Capelli questo sistema (non omogeneo) è compatibile se il rango della matrice dei coefficienti coincide con il rango della matrice completa. Studiamo quindi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è chiaramente 2 (le righe non sono proporzionali) indipendentemente da quali siano i valori di a e b. Ciò significa che il sistema è compatibile per ogni scelta di (a, b). In altre parole, l'immagine di L è tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$. Dunque $\dim ImL = 2$ e l'applicazione è suriettiva. (**Terminologia**: un omomorfismo suriettivo si dice *epimorfismo*).