Esercizio 22. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, e siano $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ due basi (ordinate) di $\mathbb{R}^2$.

1. Calcolare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ (denotate $\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$) e quelle di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ (denotate $\chi_{\mathcal{C}}(\mathbf{v})$).
2. Determinare la matrice del cambiamento di base $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ (dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$).
3. Usare la matrice del punto 2. per calcolare $\chi_{\mathcal{C}}(\mathbf{v})$ e confrontare con il risultato del punto 1.
4. Determinare la matrice del cambiamento di base $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ (dalla base $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$).
5. Usare i risultati del punto 3. e 4. per calcolare $\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$ e confrontare con quello trovato al punto 1.
6. Verificare che le matrici $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ e $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ sono l'una inversa dell'altra.

Soluzione.

1. Coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$:
$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
ossia
$$\begin{cases} a + b = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$
e risolvendo si ha $a = 5, b = -1$. Pertanto $\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$:
$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
ossia
$$\begin{cases} 2b = 4 \\ a + 3b = -1 \end{cases}$$
e risolvendo si ha $a = -7, b = 2$. Pertanto $\chi_{\mathcal{C}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. La matrice $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ ha per colonne le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{C}$. Otteniamo quindi
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} 2b = 1 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$$

da cui $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$. Pertanto la prima colonna è $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} 2b = 1 \\ a + 3b = 1 \end{cases}$$

da cui $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$. Pertanto la seconda colonna è $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. In definitiva,

$$\boxed{P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

3. Calcoliamo

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \cdot \chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

come già ottenuto nel punto 1.

4. La matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ ha per colonne le coordinate dei vettori di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Otteniamo quindi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

da cui $a = -1, b = 1$. Pertanto la prima colonna è $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

da cui $a = -1, b = 3$. Pertanto la seconda colonna è $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. In definitiva,

$$\boxed{P_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

5. Calcoliamo

$$P_{\mathcal{BC}} \cdot \chi_{\mathcal{C}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ -7+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   come già ottenuto nel punto 1.

6. $$P_{\mathcal{BC}} P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   dunque le matrici sono inverse come predetto.