Esercizio 23. Diagonalizzare ortogonalmente la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

Il fatto che sia possibile diagonalizzare ortogonalmente la matrice data è garantito dal Teorema degli Assi Principali in quanto la matrice è simmetrica.

Per la diagonalizzazione procediamo come sempre, sarà solo in un secondo momento che dovremo cercare una matrice diagonalizzante ortogonale.

Il polinomio caratteristico si può calcolare nel solito modo e ottenere

$$c_A(x) = x^2(x-3)$$

La matrice ha quindi un autovalore $\lambda_1 = 3$ di molteplicità algebrica 1 ed uno, $\lambda_2 = 0$, di molteplictà algebrica 2.

Caso $\lambda_1 = 3$. Consideriamo la matrice

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Questa è una matrice evidentemente di rango 2: non può essere 3 perché $\lambda_1 = 3$ è un autovalore, ed è due in quanto ci sono due righe non proporzionali.

Il SLO da risolvere per trovare gli autovettori è quindi:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni cartesiane di una retta per l'origine avente parametri direttori:

$$\ell = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3, \quad m = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3,$$

$$n = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Essendo i parametri direttori definiti a meno di un coefficiente di proporzionalità possiamo prendere $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ come autovettore.

Caso $\lambda_2 = 0$. Consideriamo la matrice

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa è una matrice evidentemente di rango 1 equivalente per righe alla matrice A stessa.

Il SLO da risolvere per trovare gli autovettori è quindi:

$$x + y + z = 0$$

Questa è l'equazione cartesiana di un piano per l'origine avente parametri di giacitura $a = 1, b = 1, c = 1$ ed è pertanto ortogonale al precedente autospazio.

Una base di questo sottospazio di dimensione due si trova risolvendo il SLO costituito da una sola equazione $x + y + z = 0$ e dunque:

$$\begin{cases} x = -s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

Una base di soluzioni è

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una matrice ortogonalizzante è pertanto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tuttavia P non è ortogonale come si vede facilmente dal fatto le colonne non sono tutte tra loro ortogonali né sono di norma unitaria. Infatti, i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ non sono tra loro ortogonali. Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt a questi due soli vettori ottenendo

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La matrice che ha i vettori $\mathbf{w}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ come colonne:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

non è ancora ortogonale (se si va a calcolare si trova $Q^TQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ che non è l'identità, e $QQ^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, di nuovo diverso dall'identità).

Normalizzando le colonne di Q si ottiene la matrice ortogonale

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Adesso si può infatti verificare che

$$RR^T = I \qquad R^T R = I$$

come desiderato.