Esercizio 24. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare determinata dal porre $L(1,1) = (1,-1)$ e $L(2,1) = (-3,1)$.

1. Calcolare delle equazioni per questa applicazione.
2. Determinare nucleo e immagine
3. Dire se l'applicazione è iniettiva e/o suriettiva.
4. Calcolare, se possibile, l'applicazione inversa.

Soluzione.

1. I vettori $(1,1)$ e $(2,1)$ sono ovviamente indipendenti, non essendo proporzionali, e costituiscono quindi una base di $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B} = \{(1,1),(2,1)\}$. Ogni vettore (a,b) di $\mathbb{R}^2$ è quindi combinazione lineare, in modo unico, di questi vettori, ossia:

$$x(1,1) + y(2,1) = (a,b)$$

   da cui le equazioni

$$\begin{cases} a = x + 2y \\ b = x + y \end{cases}$$

   che sono le equazioni desiderate.

2. Troviamo il nucleo risolvendo

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

   Si tratta di un sistema lineare omogeneo in cui la matrice dei coefficienti è invertibile e quindi ammette la sola soluzione banale. Ciò significa che il nucleo è $\{0\}$.

   L'immagine è invece lo spazio delle colonne. Poiché il rango è 2 l'immagine deve coincidere con tutto $\mathbb{R}^2$. In conclusione:

$$\boxed{\ker L = \{0\}, \qquad ImL = \mathbb{R}^2}$$

3. Dal punto precedente segue immediatamente che L è iniettiva perché il nucleo è $\{0\}$, ed è suriettiva perché l'immagine coincide con tutto il secondo spazio.

4. Per quanto precede, l'applicazione L è invertibile ed è pertanto possibile determinare la sua inversa.

   La matrice $M(L)$ di L rispetto alla base canonica è

$$M(L) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la cui inversa è

$$M(L) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Definiamo una nuova applicazione T mediante questa matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ossia

$$\begin{cases} a = -x + 2y \\ b = x - y \end{cases}$$

questa è l'applicazione inversa richiesta.

Verifica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{L} \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + y \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} -(x + 2y) + 2(x + y) \\ (x + 2y) - (x - y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ossia la composizione di L e T è l'identità.