

Esercizio 25. Verificare che il Folium di Cartesio

$$\begin{cases} x = t(t-1) \\ y = t(t-1)(2t-1) \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

è una curva regolare. Calcolarne la tangente nel punto A corrispondente al valore $t = \frac{1}{4}$ del parametro.

Soluzione. Il vettore velocità è:

$$\begin{cases} x' = 2t - 1 \\ y' = 6t^2 - 6t + 1 \end{cases}$$

La derivata x' si annulla per $t = \frac{1}{2}$ ma per questo valore di t la y' non si annulla dunque la curva è regolare.

Per $t = \frac{1}{4}$ abbiamo il punto della curva $A(-\frac{3}{16}, \frac{3}{32})$ e per quel valore di t le derivate valgono, rispettivamente $x' = -\frac{1}{2}$, $y' = -\frac{1}{8}$. La tangente desiderata ha quindi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{16} - \frac{t}{2} \\ y = \frac{3}{32} - \frac{t}{8} \end{cases}$$

Eliminando il parametro t otteniamo l'equazione cartesiana $y = \frac{x}{4} + \frac{9}{64}$.

Osservazione. Se volessimo calcolare la lunghezza della curva, per esempio da $t = 0$ a $t = 1$ dovremmo calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{36t^4 - 72t^3 + 52t^2 - 16t + 2} dt$$

che vale approssimativamente 0.68 (usando tecniche di integrazione numerica).