Esercizio 3.

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare autovalori, autovettori e stabilire se è diagonalizzabile ed eventualmente determinare la matrice diagonalizzante e la forma diagonale.

Soluzione. Considero il sistema $AX = \lambda X$ e voglio determinare se questo SLO ammette autosoluzione o meno.

Il sistema $AX = \lambda X$ o equivalentemente

$$(\lambda I - A)X = 0$$

ha come matrice dei coefficienti

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 2 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$. Questo è il polinomio caratteristico della matrice.

Usando il teorema di Ruffini posso scomporre questo polinomio in

$$(x-1)^2(x-2)$$

Da cui vediamo che l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2 mentre l'altro ha molteplicità algebrica 1.

Non possiamo quindi concludere alcunché.

Andiamo ora a risolvere risolvere i corrispondenti sistemi.

Caso $\lambda = 1$.

Il SLO ha matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ovviamente non ha rango 3 e altrettanto ovviamente ha rango 2.

La forma a gradini ridotta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono due pivot e come parametro possiamo prendere $z = t$

Il SLO corrispondente è

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Dunque troviamo infiniti autovettori tutti multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Vediamo che la molteplicità geometrica di questo autovalore è 1 che è diversa dalla molteplicità algebrica. Possiamo concludere ora che la matrice assegnata non è diagonalizzabile

Continuiamo comunque, per esercizio, a studiare anche l'altro autovalore.
Caso $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

la cui forma ridotta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono due pivot e il SLO è

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Dunque troviamo infiniti autovettori tutti multipli di $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Non avendo un numero sufficiente di vettori per costruire una eventuale matrice P la matrice A assegnata non è diagonalizzabile.