Esercizio 4.

Dimostrare che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sono simili.

Soluzione.

Occorre trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = B$. Procediamo come segue. Osserviamo che si può trasformare la matrice A nella matrice B facendo prima due scambi di righe. Prima scambio la prima e la seconda riga di A ottenendo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Poi scambio la seconda e terza riga di questa matrice A_1 ottenendo

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora scambio le prime due colonne di A_2 ottenendo

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Infine scambio la seconda e terza colonna di A_3 ottenendo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Questi scambi possono essere ottenuti mediante moltiplicazione per matrici elementari a sinistra (per le operazioni sulle righe) e a destra (per le operazioni sulle colonne).

Le matrici che ci occorrono sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(per scambiare la prima e terza riga o colonna)

e

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(per scambiare la prima e seconda riga o colonna)

Ad esempio

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, osservando che $P_1^{-1} = P_1$)

$$P_1 A P_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Infine,

$$P_2 P_1 A P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

come richiesto. La matrice P cercata è

$$P = P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Appendice: Osservazione sul polinomio caratteristico.

Ogni polinomio di grado n del tipo

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

può essere fattorizzato, per il Teorema fondamentale dell'algebra:

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

dove le $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici del polinomio.

Per maggior chiarezza, supponiamo che $n = 3$. Allora

$$\begin{aligned} c_A(x) &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \\ &= x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \end{aligned}$$

Ora osserviamo che una matrice A è diagonalizzabile se A è simile ad una matrice diagonale del tipo $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Sappiamo allora che il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di D che è proprio

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$$

per cui vediamo che il coefficiente di x^{n-1} in $c_A(x)$ è l'opposto della traccia e il termine noto è $(-1)^n \det A$. La formula per i coefficienti intermedi è più complicata.