Esercizio 7. In un sistema di riferimento $RC(Oxy)$, sia data la retta r di equazione $2x-y+5=0$ orientata nel verso delle x crescenti, e sia $A(-2,1)$ un suo punto. Determinare un nuovo sistema di riferimento in cui A è la nuova origine, r e il nuovo asse delle x' e il nuovo sistema sia contraverso con quello iniziale. Infine, scrivere l'equazione nel riferimento RC della retta che nel riferimento RC' ha equazione $y'=x'$ (bisettrice primo-terzo quadrante).

Soluzione.

Il versore di r concorde con l'orientazione scelta è

$$\vec{i'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

L'asse y' dovrà essere la retta per A perpendicolare a r e quindi ha equazione $x+2y=0$. Affinché il sistema RC' sia contraverso dobbiamo scegliere su s l'orientazione data dal versore

$$\vec{j'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Possiamo ora scrivere immediatamente la matrice M del cambiamento di coordinate da RC' a RC prendendo come colonne di M le componenti di questi versori

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

e dunque le equazioni di cambiamento di coordinate di vettore sono

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{\sqrt{5}} v_{x'} + \frac{2}{\sqrt{5}} v_{y'} \\ v_y = \frac{2}{\sqrt{5}} v_{x'} - \frac{1}{\sqrt{5}} v_{y'} \end{cases}$$

e quelle del cambiamento inverso

$$\begin{cases} v_{x'} = \frac{1}{\sqrt{5}} v_x + \frac{2}{\sqrt{5}} v_y \\ v_{y'} = \frac{2}{\sqrt{5}} v_x - \frac{1}{\sqrt{5}} v_y \end{cases}$$

(osserviamo che in questo caso particolare la matrice M è sia ortogonale che simmetrica e quindi essa coincide con la sua inversa); mentre le equazioni di cambiamento di coordinate di punto sono

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}} x + \frac{2}{\sqrt{5}} y + k_1 \\ y' = \frac{2}{\sqrt{5}} x - \frac{1}{\sqrt{5}} y + k_2 \end{cases}$$

dove k_1 e k_2 sono da determinarsi imponendo che A sia la nuova origine:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2) + \frac{2}{\sqrt{5}}(1) + k_1 \\ 0 = \frac{2}{\sqrt{5}}(-2) - \frac{1}{\sqrt{5}}(1) + k_2 \end{cases}$$

da cui $k_1 = 0$ e $k_2 = \sqrt{5}$ e quindi

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \\ y' = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y + \sqrt{5} \end{cases} \tag{1}$$

Per ottenere le equazioni del cambiamento inverso scriviamo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + h_1 \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' + h_2 \end{cases}$$

(qui la matrice inversa coincide con la matrice stessa) con h_1 e h_2 da determinarsi imponendo che A sia la nuova origine

$$\begin{cases} -2 = \frac{1}{\sqrt{5}}0 + \frac{2}{\sqrt{5}}0 + h_1 \\ 1 = \frac{2}{\sqrt{5}}0 - \frac{1}{\sqrt{5}}0 + h_2 \end{cases}$$

e le equazioni del cambiamento inverso sono

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' - 2 \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' + 1 \end{cases}$$

Per trovare infine l'equazione in RC della bisettrice primo-terzo quadrante di RC' basta tradurre l'equazione $y' = x'$ mediante il cambio di variabili (1):

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y + \sqrt{5}$$

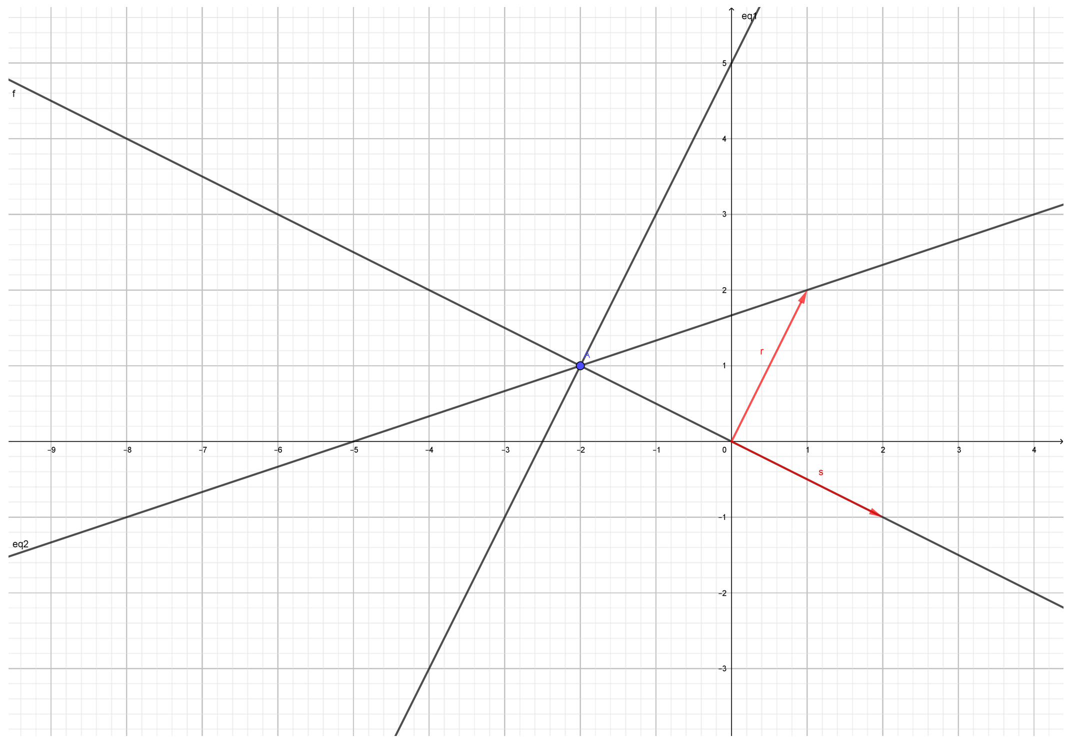
da cui

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{3}{\sqrt{5}}y + \sqrt{5} = 0$$

ossia

$$\boxed{x - 3y + 5 = 0}$$

(v. figura)



eq1
f
eq2
A
r
s