

Esercizio 9. In un sistema di riferimento $RC(Oxy)$, assegnato il punto $A(1, 2)$, una retta $d : x - 2y = 3$ e una costante $e = \frac{1}{2}$, descrivere il luogo dei punti $P(x, y)$ del piano per cui il rapporto

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{Pd}} = \frac{1}{2}$$

Soluzione.

Calcoliamo $\overline{PF} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ e $\overline{Pd} = \frac{|x-2y-3|}{\sqrt{5}}$, dove abbiamo applicato la formula per la distanza punto-retta. La condizione da soddisfare è quindi

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{Pd}} = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}}{\frac{|x-2y-3|}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$$

ossia

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x-2y-3|}{2\sqrt{5}}$$

Elevando al quadrato:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{(x-2y-3)^2}{20}$$

ossia

$$20(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4) = x^2 + 4y^2 + 9 - 4xy - 6x + 12y$$

Semplificando si ottiene

$$19x^2 + 16y^2 + 4xy - 34x - 92y + 91 = 0$$

ossia l'ellisse in figura (curva rossa)

