

Matematica Discreta

Compito del 17 giugno 2013

April 27, 2015

1. Dimostrare la seguente identità

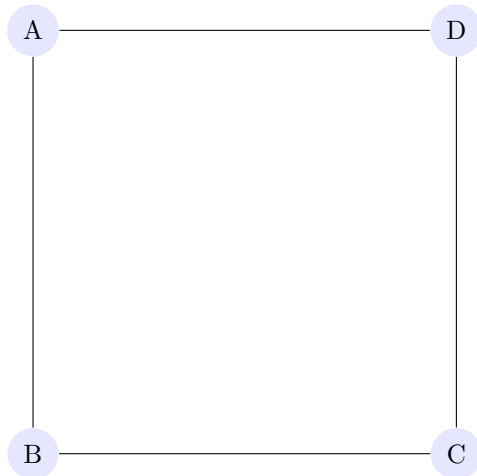
$$\sum_{i=0}^r \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}$$

2. Quanti cammini crescenti esistono (con mosse D di una unità a destra e A di una unità in alto) da $(2, 1)$ a (n, n) ?
3. Trovare e dimostrare una formula per

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n$$

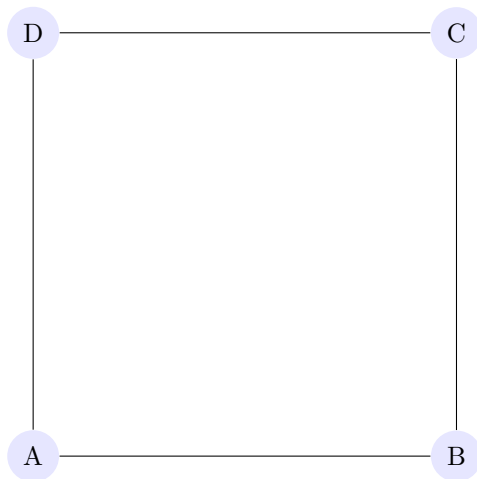
(Suggerimento: confrontare con $\binom{k}{3}$).)

4. Nel gruppo diedrale D_4 delle simmetrie del quadrato, sia dato il quadrato

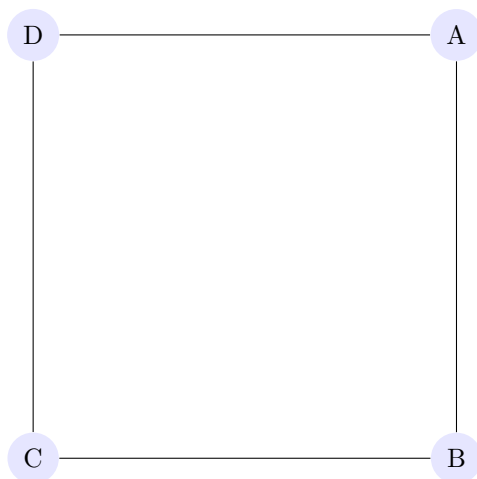


trasforma il quadrato dato in

e sia detta r la simmetria che



e f la simmetria che lo trasforma in



Calcolare fr^2 .

5. Determinare le ultime due cifre di 23^{1002} .
6. Sia $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots$ la classica successione di Fibonacci. Usando l'osservazione che

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dimostrare l'identità di Cassini:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

7. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.