Lista di esercizi
11 maggio 2016

1. Determinare il numero di sequenze binarie di lunghezza n che contengano almeno una coppia di 0 consecutivi.

   Soluzione. (Potrebbe essere utile un programma di calcolo automatico).

   Invece di contare direttamente le stringhe che hanno almeno una coppia di zeri consecutivi, è più facile contare quante stringhe non hanno zeri consecutivi e poi considerare il complementare.

   Sia dunque A_n l'insieme delle stringhe binarie di lunghezza n che non hanno zeri consecutivi e sia $a_n = |A_n|$ la sua cardinalità. Sia $B_n \subset A_n$ il sottoinsieme delle stringhe che terminano in 0, e $C_n \subset A_n$ il sottoinsieme delle stringhe che terminano in 1. Ovviamente $A_n = B_n \cup C_n$ e $A_n = B_n \cap C_n = \varnothing$. Siano b_n e c_n le rispettive cardinalità.

   Osserviamo che le stringhe di B_n sono in corrispondenza biunivoca con quelle di lunghezza $n-1$ che terminano in 1, perché se togliamo lo 0 finale la stringa rimanente non può, per la definizione di A_n terminare con 0 e quindi deve essere una stringa di C_{n-1}. Ciò significa che $b_n = c_{n-1}$. Osserviamo anche che le stringhe di C_n che terminano con 1, sono in corrispondenza biunivoca con quelle di A_{n-1} e dunque $c_n = a_{n-1}$.

   Abbiamo in definitiva che $a_n = b_n + c_n = c_{n-1} + c_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Vediamo così che la successione a_n soddisfa la relazione ricorsiva di Fibonacci. Le condizioni iniziali sono: $A_1 = \{0, 1\}$ e quindi $a_1 = 2$ e $A_2 = \{01, 10, 11\}$ e $a_2 = 3$. Ricordando la successione classica di Fibonacci che inizia $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \ldots$ abbiamo quindi che $a_n = F_{n+2}$, $n \geq 1$.

   Infine, le stringhe binarie di lunghezza n che hanno almeno due zeri consecutivi sono dunque in numero di $2^n - F_{n+2}$.

2. I biglietti di autobus di una certa città hanno dei numeri di serie di sei cifre. Secondo una ordinanza locale, un biglietto in cui la somma delle prime tre cifre è uguale alla somma delle ultime tre cifre dà diritto ad un secondo biglietto gratis. Chiamiamo *fortunato* un biglietto con questa caratteristica. Per esempio, il biglietto numero 123060 è fortunato mentre 123456 no.

   Domanda 1 Quanti biglietti fortunati possibili esistono?

   Domanda 2 Quanti biglietti fortunati esistono se i numeri di serie dei biglietti sono di 8 cifre e si dice fortunato un biglietto in cui la somma delle prime quattro cifre è uguale a quello delle ultime quattro?

   Domanda 3 Quanti biglietti fortunati se il numero delle cifre è $2n$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$?

Se a_i indica il numero delle terne di cifre la cui somma è i allora il numero di biglietti fortunati con somma i è a_i^2 perché per ogni scelta delle prime tre cifre con somma i ho una possibile scelta delle ultime tre cifre con somma i. Il totale dei biglietti fortunati che cerchiamo è quindi

$$\sum_{i=0}^{27} a_i^2$$

Al fine di calcolare questo numero possiamo procedere così. Definiamo il polinomio $A_1(s) = 1 + s + s^2 + \cdots + s^9$ che è la funzione generatrice del numero dei numeri con una sola cifra che sommano i (ovviamente ce n'è uno solo per ciascun i). Allora la funzione

$$\begin{aligned}(A_1(s))^2 = 1 + 2s + 3s^2 + 4s^3 + 5s^4 + 6s^5 + 7s^6 + 8s^7 + 9s^8 + \\ 10s^9 + 9s^{10} + 8s^{11} + 7s^{12} + 6s^{13} + 5s^{14} + 4s^{15} + \\ 3s^{16} + 2s^{17} + s^{18}\end{aligned}$$

è la funzione generatrice del numero dei numeri con due cifra che sommano i e infine

$$\begin{aligned}(A_1(s))^3 = 1 + 3s + 6s^2 + 10s^3 + 15s^4 + 21s^5 + 28s^6 + 36s^7 + \\ 45s^8 + 55s^9 + 63s^{10} + 69s^{11} + 73s^{12} + 75s^{13} + 75s^{14} + \\ 73s^{15} + 69s^{16} + 63s^{17} + 55s^{18} + 45s^{19} + 36s^{20} + \\ 28s^{21} + 21s^{22} + 15s^{23} + 10s^{24} + 6s^{25} + 3s^{26} + s^{27}\end{aligned}$$

Per risolvere il nostro problema dobbiamo fare i quadrati dei coefficienti di $A_3(s)$.

Per far ciò consideriamo $A_3(\frac{1}{s})$ e osserviamo che il termine noto del prodotto $A_3(s)A_3(\frac{1}{s})$ si ottiene dalla moltiplicazione dei vari termini $\frac{a_i}{s^i}$ per i termini $a_i s^i$ e cioè proprio a_i^2: la quantità che vogliamo calcolare.

Si ottiene 55252.

Per biglietti con 8 cifre si ottiene 4816030.

1	10
2	670
3	55252
4	4816030
5	432457640
6	39581170420
7	3671331273480
8	343900019857310
9	32458256583753952
10	3081918923741896840
11	294056694657804068000
12	28170312778225750242100

3. Determinare la funzione generatrice delle successioni seguenti

   (a) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

   (b) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \ldots$

   (c) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

   Soluzione.

   (a) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$: era stata studiata a lezione e la sua funzione generatrice è $\frac{1}{(1-x)^2}$.

   (b) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \ldots$: Questa assomiglia ad una derivata seconda e infatti la sua funzione generatrice è la derivata della funzione precedente e quindi
   $$\frac{2}{(1-x)^3}$$

   (c) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$: Questa assomiglia alla precedente tranne che invece di moltiplicare, ad esempio $2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \ldots$ si moltiplica $2 \cdot 2, 3 \cdot 3, \ldots$ e allora l'idea è di prendere l'operatore $x\frac{d}{dx}$ e di applicarlo due volte a $\frac{1}{1-x}$. Otteniamo $\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

4. Dimostrare che scelto comunque un intero positivo k, allora ogni intero positivo n può essere scritto in uno ed un solo modo nella forma
   $$n = \binom{b_1}{1} + \binom{b_2}{2} + \cdots + \binom{b_k}{k}, 0 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_k$$
   Ad esempio: Per $k = 1$ è ovvio essendo $n = \binom{n}{1}$, $n \geq 0$. Se $k = 2$ e $n = 5$ allora $5 = \binom{2}{1} + \binom{3}{2}$, se $k = 3, n = 8$ abbiamo $8 = \binom{1}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{3}$ e se $k = 4, n = 10$, $10 = \binom{0}{1} + \binom{2}{2} + \binom{4}{3} + \binom{5}{4}$

Soluzione. Per $k = 1$ è ovvio essendo $n = \binom{n}{1}$, $n \geq 0$. Supponiamo la proposizione vera per un $k \geq 1$ e sia assegnato n intero positivo. Si consideri il massimo coefficiente $\binom{b_k}{k}$ che sia minore di n, tale coefficiente è unico. La differenza $n - \binom{b_k}{k}$, per il passo precedente, si può certamente scrivere in modo unico come somma di binomiali. Ne segue che anche n è di questa forma.

5. Se $A(x)$ è la funzione generatrice di una data successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ esprimere in termini di A la funzione generatrice di $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$ In particolare dare il risultato se la successione è $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5,$.

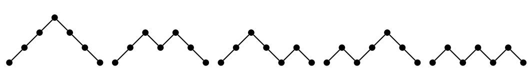
   Soluzione.

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + a_2)x + (a_2 + a_3)x^2 + (a_3 + a_4)^3 + \cdots =$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + = A(x) + \frac{A(x) - a_0}{x}$$

   Nel caso della successione data otteniamo $\frac{x+2}{1-x-x^2}$.

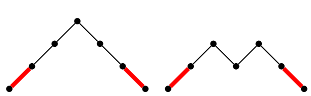
6. (Cammini su reticoli). Quanti possibili cammini esistono che, partendo dall'origine del piano cartesiano e muovendosi di un passo alla volta in due possibili maniere: a Nord-Est (secondo il vettore $(1, 1)$, oppure verso Sud-Est, secondo il vettore $(1, -1)$, tornano poi sull'asse delle x dopo $2n$ passi? Per esempio i seguenti sono cammini con 6 passi:



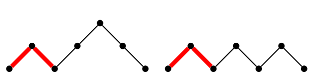
   Soluzione. Mostriamo come passare da cammini con 4 passi a cammini con 6 passi in maniera coerente con la formula di ricorrenza di Catalan.

   Cammini con 4 passi (sono due in tutto):

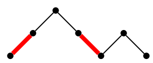
   Possiamo aggiungere i passi "nuovi" uno all'inizio e l'altro alla fine



   Possiamo aggiungere i passi "nuovi" tutti e due all'inizio:



   Oppure in "mezzo":



I tre casi sono distinti a seconda di quali cammini sono compresi tra i due nuovi aggiunti o a destra dei due nuovi aggiunti:

- nel primo caso ci sono tutti i cammini con 4 passi (e sono 2) compresi tra loro e quelli con 0 passi fuori: questo è il termine corrispondente a C_2C_0.
- nel secondo caso ci sono tutti i cammini con 0 passi compresi tra loro e quelli con 4 passi fuori: questo è il termine corrispondente a C_0C_2.
- Infine nel terzo caso ci sono tutti i cammini con 2 passi compresi tra loro e tutti i cammini con 2 passi fuori: questo è il termine corrispondente a C_1C_1.

7. Se A è un insieme con $n = 15$ elementi e $k = 2$ verificare che ci sono 15 modi di ripartire i 5 elementi di A in due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti. Per esempio (con scrittura semplificata) $12345 = 12 + 345$ è un modo di indicare $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\}$.

   Soluzione. La lista è la seguente

$$1234 + 5, 1235 + 4, 1245 + 3, 1345 + 2, 2345 + 1,$$

$$123 + 45, 124 + 35, 125 + 34, 134 + 25, , 135 + 24, 145 + 23, 234 + 15$$

$$235 + 14, 245 + 13, 345 + 12$$

   Sono 15 in tutto.

8. Verificare se le seguenti liste possono essere liste di gradi di un grafo

   (a) $2, 2, 2, 3$

   (b) $1, 2, 2, 3, 4$

   (c) $2, 2, 4, 4, 4$

   (d) $1, 2, 3, 4$

   Soluzione.

   (a) $2, 2, 2, 3$: No, perché c'è un solo vertice di grado dispari

   (b) $1, 2, 2, 3, 4$ Sì ,

   (c) $2, 2, 4, 4, 4$ No, ci sono 5 vertici, tre hanno grado 4, almeno uno degli altri deve avere grado almeno 3.

   (d) $1, 2, 3, 4$ No, ci sono 4 vertici, nessuno può avere grado 4.

9. Se $G = (V, E)$ è un grafo, il complementare $\overline{G}$ di G è il grafo i cui vertici sono gli stessi di G e gli spigoli uniscono due vertici se e solo se essi non sono adiacenti in G. Se G ha n vertici di gradi $d_1, d_2, \dots, d_n$, quali sono i gradi in $\overline{G}$?

   Soluzione. In un grafo con n vertici il grado può essere al massimo $n-1$. Se un vertice ha grado d_i lo stesso vertice ha, nel grafo complementare, il grado $n-1-d_i$.

10. Quanti grafi differenti con 7 vertici e regolari di grado 4 esistono? (Suggerimento: può essere utile considerare il grafo complementare.)

    Soluzione. Dall'esercizio precedente segue che se il grafo ha 7 vertici ed è regolare di grado 4 allora il complementare è regolare di grado $7-1-4=2$ e si tratta quindi di un ciclo C_7. Ne segue che esiste un unico grafo di 7 vertici regolare di grado 4.

11. Dimostrare che se G è un grafo con almeno due vertici allora G possiede almeno due vertici con lo stesso grado.

    Soluzione. I gradi possibili di un grafo con n vertici sono $0, 1, \dots n-1$. Non è possibile che ci siano entrambi i gradi 0 e $n-1$ e quindi per il principio dei cassetti ce ne devono essere due con lo stesso grado.

12. Descrivere, se possibile, un circuito hamiltoniano nel cubo Q_3.

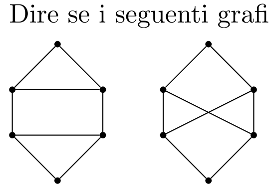
13. Qual è il numero cromatico del cubo Q_3?

    Soluzione. Abbiamo visto a lezione che il grafo Q_3 è bipartito e quindi ha numero cromatico 2.

14. Sia G un grafo bipartito con un numero dispari di vertici. Dimostrare che G non può avere un ciclo hamiltoniano.

    Soluzione. Un ciclo hamiltoniano, per definizione, deve visitare ogni vertice una ed una sola volta e finire nel punto di partenza. Sia $V = V_1 \cup V_2$ la partizione dei vertici. Un ciclo che parta da un vertice di V_1 passa poi ad un vertice di V_2 e viceversa. Se il ciclo si chiude esso deve contenere un numero pari di vertici di conseguenza non può visitare tutti vertici del grafo che sono in numero dispari.

15. Dire se i seguenti grafi sono isomorfi o meno.

    Soluzione. Nel primo grafo a sinistra c'è un triangolo mentre nel grafo a destra il circuito più breve ha lunghezza quattro. Non sono isomorfi.