Compito del 2 febbraio 2011

1. Nello spazio con riferimento $RC(O, x, y, z)$, determinare la retta a per il punto $A(2, -1, 0)$ che incontra le rette r e s di equazioni, rispettivamente, $x = y = z$ e $x = 2z + 1, y = -z + 2$.

2. Nello spazio con riferimento $RC(O, x, y, z)$, determinare il piano per l'origine parallelo alle rette

$$r : 2y + 3z - 1 = 0, y - z + 2 = 0$$

$$s : 4x - 2y + 6z + 3 = 0, x - y + z - 2 = 0$$

.

3. Data la conica di equazione $9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$, effettuare una traslazione in modo da riconoscere che si tratta di una iperbole. Trovarne centro, vertici, fuochi, e asintoti. Disegnarla.

4. Considerato il sottoinsieme U di $M(2\times 2)$ costituito dalle matrici quadrate di ordine 2 con determinante nullo, dire se U è un sottospazio di $M(2\times 2)$ (giustificando la risposta).

5. Assegnati i tre punti $P(1, 0, -\frac{2}{3})$, $Q(2, 0, \frac{1}{3})$, and $R(2, -1, -\frac{5}{3})$ nello spazio con coordinate $RC(O, x, y, z)$. Determinare un quarto punto S in modo che $PQRS$ sia un rettangolo. Calcolare l'area del rettangolo $PQRS$.

6. Se A è una matrice 5×5, calcolare $\det(-2A)$.

7. Scrivere la matrice della trasformazione ortogonale del piano ottenuta componendo la riflessione rispetto all'asse x seguita da una rotazione positiva di $\frac{\pi}{2}$. Scrivere la matrice della trasformazione inversa.

8. Se $\mathbf{v}$ è un autovettore di una matrice invertibile A, dimostrare che allora $\mathbf{v}$ è autovettore anche di A^2 e di A^{-2}, relativi a quali autovalori? (Giustificare la risposta)

9. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore di proiezione ortogonale sulla retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - 3y + z - 1 = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Calcolare il polinomio caratteristico di T.

10. Sia $T : P_4 \to P_2$ definita da $T(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = cx^2 + dx + e$, determinare una base per il nucleo ed una per l'immagine e verificare che

$$\dim\ker T + \dim \mathrm{im} T = \dim P_4$$