Compito del 25 febbraio 2011

1a. Sia P_4 lo spazio dei polinomi in una variabile di grado minore o uguale a 4 e sia c una costante reale fissata. Si definisca l'applicazione $T : P_4 \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni polinomio $p(x) \in P_4$, $T(p) = p(c) - p(2c)$ (dove, se a è uno scalare, con $p(a)$ si intende, al solito, il calcolo del polinomio nel valore a). Si verifichi che T è una applicazione lineare, se ne calcoli una matrice, una base del nucleo ed una base dell'immagine.

2a. Sia dato il sottospazio U di $M(2 \times 2)$ generato dall'insieme di matrici

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di U. Verificare inoltre che

$$\mathcal{D} = \{\begin{pmatrix} 22 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 & 12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\}$$

è anch'essa una base di U. Supponendo di aver verificato che la matrice del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$ è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 25 & 24 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$ e quindi usare la matrice P per ottenere le coordinate di $\mathbf{v}$ nella base $\mathcal{D}$.

3a. Nello spazio euclideo $V = M(2 \times 2)$ (matrici di ordine 2 a coefficienti reali) con prodotto scalare definito da $(A|B) = tr(AB^T)$, (trA denota la traccia di una matrice A), determinare la matrice appartenente al sottospazio U generato dalle matrici

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che meglio approssima la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4a. Determinare una traslazione con la quale ottenere una forma canonica della conica di equazione

$$2y^2 + 4x + 8y = 0.$$

Disegnare la conica. (Se è un ellisse trovare centro, fuochi, vertici, assi; se è un iperbole trovare centro, fuochi, vertici e asintoti; se è una parabola trovare vertice, fuoco e direttrice.)

5a. Dati i punti $P(1,1,4)$ e $Q(0,-3,5)$ determinare il punto A posizionato ad $\frac{1}{3}$ del percorso da P a Q.

6a. Determinare le equazioni cartesiane della retta r' ottenuta come proiezione ortogonale sul piano α di equazione $-x+3y+z+2=0$ della retta r di equazioni $x=y-1=z$.

7a. Scrivere la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

come prodotto di matrici elementari.

8a Sia assegnata la matrice 3×3 seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se la matrice è diagonalizzabile. Dire se è ortogonalmente diagonalizzabile. Trovare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per A. (Giustificare le proprie affermazioni).