Compito del 25 febbraio 2011

1a. In un riferimento $RC(O, x, y)$, si determinino le equazioni delle seguenti rette:

(a) a passante per $A(1, 2)$ e $B(3, 2)$;
(b) b passante per $B(3, 2)$ e $C(5/2, 4)$;
(c) c passante per $C(5/2, 4)$ e $D(1, 3)$;
(d) d passante per $D(1, 3)$ e $A(1, 2)$;
(e) Calcolare l'intersezione $E = a \cap c$ e $F = b \cap d$;
(f) Calcolare i punti medi G, H, I rispettivamente dei segmenti EF, BD AC;
(g) Verificare che G,H, I sono allineati.

2a. Siano assegnate due rette

$$r : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 6y + z = 4 \\ 2x + 13y + 3z = 12 \end{cases}$$

Verificare che r e s sono incidenti. Calcolare il punto P_0 di intersezione. Determinare un'equazione del piano che le contiene.

3a. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico, sono assegnati i vettori $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 3, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$. Determinare una base per il sottospazio dei vettori che appartengono allo spazio generato dai due vettori dati e che sono perpendicolari a $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$.

4a. Indicato con P_n lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x di grado minore o uguale a n, e sia c un fissato numero reale. Consideriamo $f : P_n \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita ponendo $f(p) = p(-c)$ (calcolo del valore del polinomio su $-c$). Verificare che f è una applicazione lineare. Dimostrare che

$$\{x + c, x^2 - c^2, \dots, x^n - (-1)^n c^n\}$$

è una base di $\ker f$.

5a. Determinare per quali valori di x i vettori

$$(1 + x, 2, 2, 1), (0, -1 + x, 0, 0), (2, 2, 1 + x, 1), (0, 0, 0, -1 + x)$$

NON costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$. Per ciascuno dei valori trovati determinare la dimensione del sottospazio da essi generato.

6a. Se A è una matrice $n \times n$, e $\mathbf{v}$ è un autovettore per A relativo all'autovalore λ, si consideri la matrice $B = A^2 + 3A$. Verificare che $\mathbf{v}$ è un autovettore anche per B. Qual è il relativo autovalore?

7a. Calcolare una base ortogonale del sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori ortogonali al vettore $(1, 1, 1, 1)$.